Contenuti

1. Insiemi e operazioni tra insiemi.
2. Sistemi numerici: naturali, interi, razionali e reali.
3. Alcune proprietà dei numeri reali.
4. Relazioni: di ordine, di equivalenza e applicazioni.
5. Polinomi e funzioni razionali.
6. Equazioni algebriche.
7. Progressioni geometriche e aritmetiche.
8. Disequazioni algebriche.
9. Geometria analitica: retta, parabola, circonferenza, ellisse e iperbole.
10. Numeri primi, Teorema della fattorizzazione unica, algoritmo euclideo per il calcolo del massimo comune divisore tra due interi.
11. Principio di induzione.
12. Trigonometria: gradi e radianti; funzioni seno, coseno e tangente; grafici delle funzioni trigonometriche e proprietà; funzioni inverse; angoli associati.
13. Funzioni esponenziali e logaritmiche.

1 Insiemi e Operazioni tra Insiemi

Un insieme può essere definito come una collezione, una raccolta di oggetti.

Per indicare gli insiemi si usano lettere maiuscole. Gli elementi di un insieme invece si indicano con lettere minuscole e per indicare che a è un elemento di A, si scrive $a \in A$ (che si legge "a appartiene ad A "), mentre per indicare che a non appartiene ad A si scrive $a \notin A$.

Un insieme può essere assegnato elencando i suoi elementi (per elencazione) o enunciando una proprietà che caratterizza i suoi elementi (per proprietà caratteristica).

Ad esempio, l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ è l'insieme dei primi cinque numeri naturali, $B = \{a, b, c, d, e\}$ è l'insieme delle prime cinque lettere dell'alfabeto.

Un insieme privo di elementi si dice *insieme vuoto* e lo si indica con $\emptyset$.

Due insiemi A e B si dicono uguali, $A = B$, se hanno gli stessi elementi, ovvero se ogni elemento di A è elemento anche di B e viceversa se ogni elemento di B è elemento anche di A.

Si dice che A è un sottoinsieme di B, $A \subseteq B$, se ogni elemento di A è un elemento anche di B. In particolare, A risulta un sottoinsieme proprio se $A \subseteq B$, ma $A \neq B$. In tal caso si scrive $A \subsetneq B$ o $A \subset B$.

Se esiste almeno un elemento di A che non appartiene a B, si ha che A non è un sottoinsieme di B e in tal caso si scrive $A \not\subset B$.

Ad esempio, l' insieme $A = \{1, a, x\}$ è sottoinsieme dell'insieme $B = \{1, a, x, y, z\}$, mentre l'insieme $C = \{x, , t\}$ non è sottoinsieme di B.

Ogni insieme A ammette come sottoinsiemi se stesso e l'insieme vuoto $\emptyset$. Tali sottoinsiemi sono detti banali.

Dati gli insiemi A e B, si dice intersezione tra A e B l'insieme $A \cap B = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\}$, ossia l'insieme degli elementi che appartengono sia all'insieme A che all'insieme B.

Se $A \cap B = \emptyset$, gli insiemi si dicono disgiunti.

Si osservi che se $A \cap B = A$, allora $A \subseteq B$ e viceversa se $A \subseteq B$, allora $A \cap B = A$.

Si dice unione di A e B l'insieme $A \cup B = \{x | x \in A \text{ o } x \in B\}$, ossia l'insieme degli elementi che appartengono ad almeno uno degli insiemi A, B.

Si osservi che se $A \cup B = B$ allora $A \subseteq B$. Infatti $A \cup B = B$ significa che ogni $a \in A$ è un elemento anche di $A \cup B$, ma $A \cup B = B$, quindi $a \in B$ ovvero $A \subseteq B$. Vale anche il viceversa: se $A \subseteq B$ allora $A \cup B = B$.

Si dice differenza tra A e B l'insieme $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ e } x \notin B\}$, ossia l'insieme degli elementi di A che non appartengono a B.

Si dice differenza simmetrica (o unione disgiunta) tra A e B l'insieme $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Ad esempio, se $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, x, y\}$, si ha che $A \setminus B = \{4, 5\}$, $A\Delta B = \{4, 5, x, y\}$.

Se A è un sottoinsieme di B si dice complementare di A in B l'insieme $\overline{A} = B \setminus A$.

Ad esempio, l'insieme $A = \{1, 2, 3\}$ è un sottoinsieme dell'insieme $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e il suo complementare è dato da $\overline{A} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Dato un insieme A, si dice insieme delle parti di A l'insieme che ha per elementi tutti e soli i sottoinsiemi di A. Tale insieme viene indicato con $\mathcal{P}(A)$.

Ad esempio, se $A = \{a, b, c\}$ allora $\mathcal{P}(A)$ contiene i sottoinsiemi banali, cioè l'insieme vuoto e l'insieme A stesso, i singoletti $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ e i sottoinsiemi contenenti due elementi, ossia $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ e $\{b, c\}$. Pertanto $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$.

Se A ha cardinalità n, ossia A contiene n elementi, allora $\mathcal{P}(A)$ ha cardinalità 2^n.

Siano A e B insiemi, si dice prodotto cartesiano di A e di B l'insieme $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$, ossia l'insieme di tutte le coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$.

Si osservi che coppia ordinata significa che la coppia $(1, 2)$ è diversa dalla coppia $(2, 1)$.

Per esempio, si considerino $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{x, y\}$; si ha che $A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}$.

2 Sistemi Numerici: Naturali, Interi, Razionali e Reali

Gli insiemi numerici che spesso si incontrano in matematica sono i seguenti:

1. l'insieme $\mathbb{N}$ dei *numeri naturali*, ovvero $=\{0, 1, 2, \ldots\}$;
2. l'insieme $\mathbb{Z}$ dei *numeri interi*, ovvero $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

   E' facile osservare che ogni numero naturale è anche intero, pertanto $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, ossia l'insieme $\mathbb{N}$ è contenuto nell'insieme $\mathbb{Z}$.

   Di seguito si danno alcune definizioni riguardanti i numeri interi.

   Definizione 1 *Siano $m, n \in \mathbb{Z}$ numeri interi. Si dice massimo comune divisore di m e n, e lo si indica con $MCD(m, n)$, quel numero naturale $d \in \mathbb{N}$ che soddisfa le seguenti proprietà:*

   (a) d è un divisore di m e di n;

(b) se $c \in \mathbb{Z}$ è un divisore di m e di n, allora c divide anche d.

Se $MCD(m,n) = 1$, si dice che m ed n sono primi tra loro o relativamente primi.

Definizione 2 *Siano $m, n \in \mathbb{Z}$ numeri interi. Si dice minimo comune multiplo di m e n, e lo si indica con $mcm(m,n)$, quel numero naturale $r \in \mathbb{N}$ che soddisfa le seguenti proprietà:*

(a) r è un multiplo di m e di n, ovvero m divide r e n divide r;

(b) se $c \in \mathbb{Z}$ è un multiplo di m e di n, allora c è un mutiplo anche di r.

Si ricorda con un esempio il procedimento per il calcolo del massimo comune divisore e del minimo comune multiplo tra due interi.

Esempio

Siano $m = 297$ e $n = -165$, calcolare il loro massimo comune divisore e il loro minimo comune multiplo.

Si fattorizzano m ed n nel prodotto di potenze di numeri primi, a meno del segno:

$$m = 297 = 3^3 \cdot 11$$

$$n = -165 = -3 \cdot 5 \cdot 11$$

Il massimo comune divisore tra m ed n è dato dal prodotto dei fattori comuni ad m ed n, quelli comuni con il minimo esponente:

$$MCD(297, -165) = 3 \cdot 11.$$

Il minimo comune multiplo tra m ed n si ottiene invece dal prodotto dei fattori comuni e non comuni ad m ed n, con il massimo esponente:

$$mcm(297, -165) = 3^3 \cdot 5 \cdot 11.$$

3. l'insieme $\mathbb{Q}$ dei *numeri razionali*, ovvero $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$;

   Si osserva che ogni numero intero è anche razionale, pertanto l'insieme $\mathbb{Q}$ contiene l'insieme $\mathbb{Z}$. Si ha così che $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset Q$.

   L'insieme $\mathbb{Q}$ è l'insieme di quei numeri che si possono rappresentare sotto forma di frazione. Ogni frazione dà luogo ad un numero che nella sua rappresentazione decimale può essere *finito* oppure *infinito periodico*.

Si ha un *numero decimale finito* quando la frazione di partenza ridotta ai minimi termini ha il denominatore che è divisibile per 2, per 5 o da entrambi.

Si ha invece un *numero decimale infinito e periodico*, cioè un numero con un numero infinito di cifre decimali che, a partire da una certa cifra decimale in poi, si ripetono indefinitamente a gruppi identici, quando la frazione di partenza ridotta ai minimi termini ha il denominatore che è divisibile per almeno un fattore primo diverso da 2 e da 5.

Esempio

Le frazione $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{25}$ e $\frac{7}{20}$ generano un numero decimale finito poiché i rispettivi denominatori sono divisibili solo da 2 e\o solo da 5.

La frazione $\frac{5}{30}$ invece dà luogo ad un numero decimale infinito periodico poiché il denominatore ammette il 3 come divisore primo.

In un numero decimale illimitato periodico si distinguono:

- la *parte intera* (prima della virgola);
- l'*antiperiodo* (l'eventuale gruppo di cifre decimale che non si ripete)
- il *periodo* (gruppo di cifre decimali che si ripete).

Esempio

La parte intera di $\frac{1}{6} = 0.1\overline{6}$ è 0, l'antiperiodo è 1 e il periodo 6.

Per ottenere la frazione corrispondente (o generatrice) di un numero decimale limitato si scrive a numeratore il numero dato (tralasciando la virgola), mentre al denominatore si scrive l'unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre decimali del numero dato.

Per ottenere la frazione generatrice di un numero decimale illimitato periodico si scrive a numeratore la differenza tra il numero dato (tralasciando la virgola e scrivendo una sola volta il gruppo di cifre che formano il periodo) e il numero formato dalle cifre che precedono il periodo; al denominatore invece si scrivono tanti 9 quante sono le cifre del periodo, seguiti da tanti zeri quante sono le cifre dell'antiperiodo, se questo esiste.

Esempio

La frazione generatrice di 3.85 è $\frac{385}{100} = \frac{77}{20}$.

La frazione generatrice di $3.5\overline{5}$ è $\frac{355-35}{90} = \frac{32}{9}$.

Il metodo per ottenere la funzione generatrice di $3.5\overline{5}$, o di qualsiasi altro numero decimale periodico, può essere enunciato diversamente:

si prende il numero dato e lo si moltiplica per 100 e poi per 10, ossia $3.5\overline{5} \cdot 100 = 355,\overline{5}$ e $3.5\overline{5} \cdot 10 = 35.\overline{5}$.

Sottraendo $3.5\overline{5} \cdot 10$ da $3.5\overline{5} \cdot 100$ si ottiene che $3.5\overline{5} \cdot 100 - 3.5\overline{5} \cdot 10 = 355 - 35$. Tuttavia $3.5\overline{5} \cdot 100 - 3.5\overline{5} \cdot 10 = 3.5\overline{5} \cdot 90$, pertanto si ha che $3.5\overline{5} \cdot 90 = 355 - 35$. Dividendo per 90 ambo i membri di quest'ultima espressione si ottiene $3.5\overline{5} = \frac{355-35}{90} = \frac{32}{9}$.

4. l'insieme $\mathbb{R}$ dei *numeri reali*, che è dato dai *numeri razionali* $\mathbb{Q}$ e dai *numeri irrazionali*, ovvero quei numeri rappresentabili come numeri decimali illimitati non periodici, come ad esempio $\pi = 3.14\ldots$ o $\sqrt{3} = 1.73205080756887729\ldots$.

   Si osserva che $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

E' importante ricordare che NON è mai possibile dividere per zero. Infatti, ad esempio, l'equazione $0 \cdot x = 2$ non ammette nessuna soluzione reale, ovvero non esiste nessun numero reale x che moltiplicato per 0 dia 2 (o qualsiasi altro numero reale non nullo), quindi non si può dare significato all'espressione $\frac{2}{0}$.

Allo stesso modo l'equazione $0 \cdot x = 0$ ammette infinite soluzioni reali, quindi non si può dare significato all'espressione $\frac{0}{0}$.

In questo precorso ogni operazione è intesa tra numeri reali.

3 Alcune Proprietà dei Numeri Reali

Rappresentazione di $\mathbb{R}$ su una retta

Data una retta r, si fissa su di essa un punto O, detto *origine*, un segmento unitario ed un verso postivo di percorrenza, generalmente da sinistra verso destra, che viene indicato con una freccia. In questo modo r prende il nome di *asse reale*. L'origine divide r in due semirette delle quali si dice *positiva* quella che contiene i punti successivi al punto O nel verso positivo e *negativa* l'altra.

Per ogni punto P della retta r esiste un unico numero reale x tale che il segmento OP ha lunghezza x o $-x$ a seconda che P si trovi a destra di O o a sinistra di O sull'asse r.

Viceversa, ad ogni numero reale x corrisponde un unico punto P su r. Infatti se x è postivo è possibile determinare il punto P a destra di O sull'asse r che si trova a distanza x da O. Invece se x è negativo, è possibile determinare il punto P a sinistra di O sull'asse r che si trova a distanza $-x$ da O.

In altre parole esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti di r e i numeri reali.

Il numero reale x è detto *ascissa* del punto P.

Confronto di numeri reali

Siano a e b numeri reali. Si ha che uno ed uno solo dei seguenti casi si verifica (legge di tricotomia):

$$a = b \qquad a > b \qquad a < b$$

Infatti per la corrispondenza biunivoca descritta sopra, i numeri reali a e b si possono identificare con i punti A e B rispettivamente dell'asse reale. Pertanto può accadere che:

1. $A = B$ cioè il punto A coincide con B, oppure
2. il punto A giace a destra di B, oppure
3. il punto A giace a sinistra di B.

Tali casi corrispondono a $a = b$, $a > b$ e $a < b$.

Il confronto numerico tra numeri reali si può sempre eseguire tenendo conto che:

(i) se i numeri da confrontare sono razionali, cioè sono frazioni, si riscrivono i numeri in modo tale che abbiano lo stesso denominatore, poi si confrontano i numeratori;

Esempio

$3 > \frac{7}{4}$ poiché $12 > 7$;

$\frac{6}{11} < \frac{3}{2}$ poiché $12 < 33$.

(ii) se almeno uno dei numeri è irrazionale, ovvero non si può esprimere come frazione, si considerano i numeri nella forma decimale, con un sufficiente numero di cifre dopo la virgola.

Esempio

$\frac{17}{10} < \sqrt{3}$ perché $\frac{17}{10} = 1.7$ mentre $\sqrt{3} = 1.73\ldots$;

$\frac{7}{10} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ perché $\frac{7}{10} = 0.7$ mentre $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707\ldots$;

(iii) se almeno uno dei numeri è negativo, basta tener conto che ogni numero negativo è minore di ciascun numero positivo, mentre il confronto tra numeri negativi si riconduce al confronto dei rispettivi opposti, rovesciando il segno della disuguaglianza.

Esempio

$-5 < -1$ perché $5 > 1$;
$-\frac{3}{2} > -2$ perché $3 < 4$;
$-\frac{5}{3} > -\frac{7}{4}$ perché $20 < 21$.

Esercizio. Disporre in ordine decrescente i seguenti numeri

$$\frac{13}{5}, \qquad 2\sqrt{2}, \qquad -\sqrt{5}, \qquad \frac{11}{6}, \qquad -\frac{2}{11}, \qquad \frac{1}{9}.$$

Soluzione. I numeri positivi sono maggiori di quelli negativi, inoltre

$$2\sqrt{2} > \tfrac{13}{5} \quad \text{perché} \quad 2.8 > 2.6$$

$$\tfrac{13}{5} > \tfrac{11}{6} \quad \text{perché} \quad 78 > 55$$

$$\tfrac{11}{6} > \tfrac{1}{9} \quad \text{perché} \quad 33 > 2$$

Si considerano ora i numeri negativi. Si ha che:

$$-\tfrac{2}{11} > -\sqrt{5} \quad \text{perché} \quad 0.1 < 2.2$$

L'ordine richiesto è pertanto il seguente:

$$2\sqrt{2}, \qquad \frac{13}{5}, \qquad \frac{11}{6}, \qquad \frac{1}{9}, \qquad -\frac{2}{11}, \qquad -\sqrt{5}.$$

Valore assoluto di un numero reale

Il valore assoluto di un numero reale a è dato dal numero stesso se a è positivo o nullo, dall'opposto di esso se a è negativo. Indicando con $|a|$ il valore assoluto di a, si ha che:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{se} \quad a < 0 \end{cases}$$

Esempio
$|\frac{2}{11}| = \frac{2}{11}$; $|-\frac{1}{5}| = \frac{1}{5}$; $|-\pi| = \pi$; $|-\sqrt{7}| = \sqrt{7}$; $|-1.5| = 1.5$; $|\sqrt{5}| = \sqrt{5}$.

4 Relazioni:di ordine, di equivalenza e applicazioni

Si dice *relazione* tra gli insiemi A e B un qualunque sottoinsieme di $A \times B$.

Se $\mathcal{R}$ è una relazione tra A e B, ovvero $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, si scriverà $a\mathcal{R}b$, o $a \overset{\mathcal{R}}{\equiv} b$, per indicare che $(a, b) \in \mathcal{R}$ e si dirà che a è in relazione con b (rispetto

ad $\mathcal{R}$). In particolare, se l'insieme B coincide con l'insieme A, si dice che $\mathcal{R}$ è una relazione sull'insieme A.

Esempio. Sia A l'insieme delle rette del piano e sia $\mathcal{R}$ la relazione su A così definita:

$$(r, s) \in \mathcal{R} \text{ se la retta } r \text{ è parallela alla retta } s \text{ oppure se } r = s.$$

Tale relazione è detta relazione di parallelismo e se $(r, s) \in \mathcal{R}$, si scriverà $r \parallel s$. Si osservi inoltre che per ogni retta $r \in A$ si ha che $r \parallel r$.

Esempio. Sia $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e sia $\mathcal{R}$ una relazione su A così definita:

$$a\mathcal{R}b \text{ se e solo se } a \neq b, \ a \text{ e } b \text{ sono pari e } a \text{ divide } b.$$

Si ha pertanto che:

$$\mathcal{R} = \{(2,0), (2,4), (2,6), (2,8), (2,10), (4,0), (4,8), (6,0), (8,0), (10,0)\}.$$

Sia A un insieme e sia $\mathcal{R} \subset A \times A$.

La relazione $\mathcal{R}$ è detta relazione di ordine parziale se sono soddisfatte le seguenti proprietà:

(i) proprietà riflessiva: $(a, a) \in \mathcal{R}$ per ogni $a \in A$;

(ii) proprietà antisimmetrica: se $(a, b) \in \mathcal{R}$ e $(b, a) \in \mathcal{R}$ allora $a = b$;

(iii) proprietà transitiva: se $(a, b) \in \mathcal{R}$ e $(b, c) \in \mathcal{R}$ allora $(a, c) \in \mathcal{R}$

Una relazione di ordine parziale solitamente viene indicata con il simbolo $\leq$, così che $a\mathcal{R}b$ si scrive come $a \leq b$. In particolare, le proprietà sopra diventano:

(i) $a \leq a$ per ogni $a \in A$;

(ii) $a \leq b$ e $b \leq a$ allora $a = b$;

(iii) se $a \leq b$ e $b \leq c$ allora $a \leq c$.

Un insieme A dotato di una relazione di ordine parziale $\leq$ viene indicato con $(A, \leq)$ e si dice che A è parzialmente ordinato.

Sia A un insieme e sia $\mathcal{R} \subset A \times A$. La relazione $\mathcal{R}$ è detta relazione di ordine totale se sono soddisfatte le proprietà $(i), (ii), (iii)$, di cui sopra, e la seguente proprietà:

(iv) per ogni $a, b \in A$ si ha $(a, b) \in \mathcal{R}$ o $(b, a) \in \mathcal{R}$

Scrivendo $a \leq b$ al posto di $(a, b) \in \mathcal{R}$ la (iv) diventa: per ogni $a, b \in A$ si ha $a \leq b$ o $b \leq a$.

Se A è dotato di una relazione di ordine totale si dice che $(A, \leq)$ è totalmente ordinato.

Si osservi che la proprietà (iv) significa che in un insieme A totalmente ordinato due elementi qualsiasi sono sempre confrontabili tra loro.

Esempi.

1. $(\mathbb{N}, \leq)$, dove $a \leq b$ se $b - a \in \mathbb{N}$, è totalmente ordinato;
2. $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \leq)$, dove $a \leq b$ se a divide b, è parzialmente ordinato ma non totalmente ordinato;
3. sia A un insieme, $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti di A e $\mathcal{R}$ una relazione su A così definita: $X \leq Y$ se $X \subseteq Y$. L'insieme $(\mathcal{P}(A), \leq)$ è parzialmente ordinato, ma non totalmente.

Sia A un insieme ed $\mathcal{R} \subset A \times A$ una relazione in A. La relazione $\mathcal{R}$ è detta relazione di equivalenza se sono soddisfatte le seguenti proprietà:

1. proprietà riflessiva: $(a, a) \in \mathcal{R}$ per ogni $a \in A$;
2. proprietà simmetrica: $(a, b) \in \mathcal{R}$ allora $(b, a) \in \mathcal{R}$;
3. proprietà transitiva: se $(a, b) \in \mathcal{R}$ e $(b, c) \in \mathcal{R}$ allora $(a, c) \in \mathcal{R}$.

Scrivendo $a \sim b$ se $a\mathcal{R}b$ e proprietà prescedenti risultano:

1. $a \sim a$ per ogni $a \in A$;
2. se $a \sim b$ allora $b \sim a$;
3. se $a \sim b$ e $b \sim c$ allora $a \sim c$.

Esempio. La relazione di parallelismo precedentemente definita sull'insieme A delle rette del piano è una relazione di equivalenza.

Se $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza sull'insieme A, per ogni $a \in A$ si dice classe di equivalenza di a l'insieme $[a]_{\mathcal{R}} = \{x | x \in A, x\mathcal{R}a\}$, ovvero $[a]_{\mathcal{R}}$ è l'insieme di tutti e soli gli elementi di A che sono in relazione (o equivalenti) ad a. Se $b \in [a]_{\mathcal{R}}$ si ha che $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$. Per dimostrarlo basta osservare che i due insiemi contengono gli stessi elementi.

L'insieme $A/\mathcal{R} = \{[a]_{\mathcal{R}} | a \in A\}$ delle classi di equivalenza si chiama insieme quoziente (mod $\mathcal{R}$).

Esempio. Sia $\mathcal{R}$ la relazione così definita su $\mathbb{Z}$:

$$a\mathcal{R}b \text{ se } a - b \text{ è divisibile per } 2.$$

La relazione $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza. Infatti:

1. proprietà riflessiva: $a - a = 0$ è divisibile per 2 per ogni $a \in \mathbb{Z}$;

2. proprietà simmetrica: se $a \sim b$, ovvero $a - b = 2q$ con $q \in \mathbb{Z}$, allora $b - a = 2(-q)$, ovvero $b - a$ è divisibile per 2, pertanto $b \sim a$;

3. proprietà transitiva: se $a \sim b$, cioè $a - b = 2q_1$ con $q_1 \in \mathbb{Z}$, e $b \sim c$, cioè $b - c = 2q_2$ con $q_2 \in \mathbb{Z}$, allora $a \sim c$ poiché $a - c = (a - b) - (b - c) = 2q_1 - 2q_2 = 2(q_1 - q_2)$ ovvero $a - c$ è divisibile per 2.

Sia $a \in \mathbb{Z}$, si ha che $[a]_{\mathcal{R}} = \{x | a - x = 2q, q \in \mathbb{Z}\}$. In particolare si ha che se $a = 0$, la sua classe di equivalenza contiene tutti gli interi del tipo $x = 2q$, ovvero contiene tutti gli interi pari. Invece se $a = 1$, allora $[1]_{\mathcal{R}}$ contiene tutti gli interi del tipo $2q + 1$, ovvero tutti gli interi dispari. Inoltre, comunque preso $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0, 1$, si ha che se a è pari allora $a \sim 0$, pertanto $[a]_{\mathcal{R}} = [0]_{\mathcal{R}}$, mentre se a è dispari si ha che $a \sim 1$, pertanto $[a]_{\mathcal{R}} = [1]_{\mathcal{R}}$. In altre parole l'insieme quoziente $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$ contiene solo due elementi: $\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{[0]_{\mathcal{R}}, [1]_{\mathcal{R}}\}$.

La relazione di equivalenza dell'esempio sopra si può definire per qualsiasi intero positivo n, non soltanto per $n = 2$. Tale relazione è nota come relazione di congruenza modulo n e viene indicata con $\equiv_n$ o con $\equiv \pmod{n}$. La relazione risulta così espressa:

se $a, b \in \mathbb{Z}$, si ha che a è congruo a b modulo n, $a \equiv b \pmod{n}$, se $a - b$ è divisibile per n.

Le classi di equivalenza sono $[0], [1], \ldots, [n-1]$. Sono dette classi resto modulo n e sono esattamente n, ovvero tante quanti sono i possibili resti nella divisione per n. Infatti comunque preso un intero a e eseguendo la divisione per n, si ottiene che $a = n \cdot q + r$, dove $q, r \in \mathbb{Z}$ e rappresentano il quoziente e il resto della divisione. Ne segue che $a - r = n \cdot q$, ovvero $a - r$ è divisibile per n, quindi per la definizione di relazione di congruenza si ha che $a \sim r$, da cui $a \in [r]$. E' possibile far vedere che le classi resto modulo n sono a due a due distinte. Infatti se si suppone, per assurdo, che esistano due classi, siano $[i]$ e $[j]$, con $0 \leq i < j < n$, tali che $[i] = [j]$, si avrebbe che $j \sim i$ ovvero $j - i$ divisibile per n, pertanto $j - i \geq n$, che è assurdo essendo $i, j < n$.

L'insieme quoziente della relazione di congruenza modulo n si indica con $\mathbb{Z}_n$. Così ad esempio $\mathbb{Z}_2 = \{[0], [1]\}$ e $\mathbb{Z}_3 = \{[0], [1], [2]\}$. In generale $\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}$.

Esercizi. Verificare se le seguenti relazioni sono relazioni di equivalenza. Nel caso di relazioni di equivalenza determinare le classi.

1. $\mathcal{R} \subset \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* : n\mathcal{R}m$ se n divide m;

2. A insieme dei punti del piano in cui è assegnato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, $\mathcal{R} \subset A \times A : a\mathcal{R}b$ se la distanza tra a e b è minore o uguale a 1, ossia $d(a, b) \leq 1$;

3. $\mathcal{R} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a\mathcal{R}b$ se $|a| = |b|$.

Soluzione.

1. $\mathcal{R}$ non è una relazione di equivalenza poiché la proprietà simmetrica non è verificata. Infatti 2 divide 10, ovvero $(2, 10) \in \mathcal{R}$, ma 10 non divide 2, ovvero $(10, 2) \notin \mathcal{R}$.

2. $\mathcal{R}$ non è una relazione di equivalenza poiché la proprietà transitiva non è verificata: preso ad esempio un quadrato di lato 1, indicando con ac la diagonale del quadrato e con b il vertice opposto alla diagonale, si ha che $d(a, b) = 1$, $d(b, c) = 1$, ma $d(a, c) = \sqrt{2} > 1$ quindi $(a, c) \notin \mathcal{R}$.

3. $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza. Infatti: $a\mathcal{R}a$ per ogni $a \in \mathbb{Z}$ poiché $|a| = |a|$; $a\mathcal{R}b$ significa che $|a| = |b|$ quindi $|b| = |a|$ cioè $b\mathcal{R}a$; $a\mathcal{R}b$ significa che $|a| = |b|$, $b\mathcal{R}c$ significa che $|b| = |c|$, quindi $|a| = |c|$, ossia $a\mathcal{R}c$.

   Si considerano ora le classi di equivalenza. Sia $a \in \mathbb{Z}$, si ha che $[a]_{\mathcal{R}} = \{b \in \mathbb{Z} : |b| = |a|\}$, pertanto $[a]_{\mathcal{R}} = \{a, -a\}$ per ogni $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Se $a = 0$ si ha che $[0]_{\mathcal{R}} = \{0\}$.

Siano A e B insiemi. Si dice applicazione di A in B ogni relazione $\mathcal{R} \subset A \times B$ che soddisfa la seguente proprietà:

per ogni $a \in A$ esiste uno ed un solo $b \in B$ tale che $(a, b) \in \mathcal{R}$.

Ad esempio $\mathcal{R} = \{(1, a), (3, y), (5, a), (7, c)\}$ è una applicazione di $A = \{1, 3, 5, 7\}$ in $B = \{a, c, x, y, z\}$, mentre $\mathcal{R} = \{(3, z), (7, c)\}$ non è una applicazione di A in B.

Una applicazione $\mathcal{R}$ di A in B viene generalmente indicata con $\mathcal{R} : A \longrightarrow B$ e per indicare che $(a, b) \in \mathcal{R}$ si scrive $b = \mathcal{R}(a)$. Se $b = \mathcal{R}(a)$ si dice che b è il corrispondente di a nell'applicazione $\mathcal{R}$.

Sia $\mathcal{R} : A \longrightarrow B$ una applicazione di A in B. L'insieme A è detto dominio di $\mathcal{R}$ e lo si indica con $D(\mathcal{R})$.

Il sottoinsieme di B costituito da quegli elementi che sono i corrispondenti di almeno un elemento di A è detto codominio di $\mathcal{R}$ e lo si indica con $C(\mathcal{R})$.

Nell'esempio precedente il codominio dell'applicazione è dato dall'insieme $\{a, c, y\}$.

Sia $f : A \longrightarrow B$ una applicazione di A in B. Si dice che f è iniettiva se ad elementi distinti di A corrispondono elementi distinti di B, ossia:

$$f(a) = f(b) \text{ implica } (\Longrightarrow)\ a = b$$

o equivalentemente

$$a \neq b \Longrightarrow f(a) \neq f(b)$$

Per esempio, l'applicazione $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ che ad ogni intero n associa il proprio valore assoluto, cioè $f(n) = |n|$ non è iniettiva perché $f(3) = f(-3)$. Invece l'applicazione $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ che ad ogni numero reale x associa il numero reale $x + 5$, cioè $g(x) = x + 5$ è iniettiva poiché $g(x) = g(y)$, ovvero $x + 5 = y + 5$ implica $x = y$.

Sia $f : A \longrightarrow B$ una applicazione di A in B. Si dice che f è suriettiva se ogni elemento di B è il corrispondente di almeno un elemento di A, ossia:

$$\text{per ogni } b \in B \text{ esiste } a \in A \text{ tale che } b = f(a).$$

Una applicazione $f : A \longrightarrow B$ si dice biiettiva se risulta iniettiva e suriettiva, cioè se ad ogni elemento di B corrisponde uno ed un solo elemento di A.

Le applicazioni $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = |n|$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + 5$, sono entrambe suriettive, ma solamente $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ risulta biiettiva.

Esercizi. Stabilire se le seguenti funzioni risultano iniettive e\o suriettive:

1. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^2$;
2. $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $x \mapsto \frac{3x+2}{2}$;
3. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $x \mapsto 2x$;
4. $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $x \mapsto 10 - x$;

Soluzione.

1. La funzione non è iniettiva poiché $f(1) = f(-1) = 1$. Non è nemmeno suriettiva poiché non esiste nessun numero intero x tale che $x^2 = 2$.
2. La funzione è iniettiva poiché $f(x) = f(y)$, ossia $\frac{3x+2}{2} = \frac{3y+2}{2}$, implica $x = y$. E' suriettiva poiché per ogni numero razionale $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, con $m, n \in \mathbb{Z}$, il numero $x = \frac{2m}{3n} - \frac{2}{3}$, che appartiene a $\mathbb{Q}$ perché differenza di numeri razionali, è tale che $f(x) = f(\frac{2m}{3n} - \frac{2}{3}) = \frac{3}{2}(\frac{2m}{3n} - \frac{2}{3}) + 1 = \frac{m}{n} - 1 + 1 = \frac{m}{n}$.
3. La funzione è iniettiva. Infatti presi $x, y \in \mathbb{N}$ e supponendo $f(x) = f(y)$, si ha che $2x = 2y$, ovvero $x = y$. La funzione non è suriettiva: non esiste nessun numero naturale x tale che $f(x) = 1$ infatti $f(x) = 2x$ è sempre divisibile per 2, ovvero è sempre un numero pari.
4. La funzione è iniettiva poiché $f(x) = f(y)$, ossia $10 - x = 10 - y$, implica $x = y$. La funzione è suriettiva perchè per ogni $y \in \mathbb{Q}$ è possibile determinare un elemento $x \in \mathbb{Q}$ che soddisfa la condizione

$y = 10 - x$. Basta infatti prendere $x = 10 - y$. Si osservi che $10 - y$ è un numero razionale perché dato dalla differenza di due numeri razionali. Essendo f iniettiva e suriettiva si ha che f è biiettiva.

Siano A, B, C insiemi e siano f una applicazione di A in B e g una applicazione di B in C. Si dice prodotto (operatorio) o composizione di f e g l'applicazione $g \circ f : A \longrightarrow C$ definita da $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Esempi.

1. Siano $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y, z\}$ e $C = \{r, s\}$; siano $f : A \longrightarrow B$, tale che $f(1) = x, f(2) = x, f(3) = y$, e $g : B \longrightarrow C$ tale che $g(x) = r, g(y) = r, g(z) = s$.

   Si ha che $g \circ f : A \longrightarrow C$ ed è tale che

   $$g \circ f(1) = g(f(1)) = g(x) = r$$
   $$g \circ f(2) = g(f(2)) = g(x) = r$$
   $$g \circ f(3) = g(f(3)) = g(y) = r$$

2. Sia $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ tale che $f(n) = |n| + 1$ e sia $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ tale che $g(n) = 3n$.

   Si ha che $g \circ f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ è tale che $g \circ f(n) = 3|n| + 3$.

Si osservi che se $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ sono applicazioni biiettive, allora $g \circ f$ è una applicazione biiettiva di A in C.

Invece, se $g \circ f$ è una applicazione biiettiva, non è detto che tali risultino f e g.

Ad esempio, se $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ ed è tale che $f(n) = -n+2$, e $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}\backslash\{0\}$ ed è tale che $g(n) = |n - 2| + 1$, si ha che $g \circ f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ è definita da $g \circ f(n) = | - n + 2 - 2| + 1 = n + 1$ e pertanto risulta biiettiva. Tuttavia f non è suriettiva (per esempio 3 non è il corrispondente di nessun numero naturale). Invece g non è iniettiva poiché $g(3) = g(1)$.

Sia $f : A \longrightarrow B$ una applicazione biiettiva. Si dice applicazione inversa di f, e la si indica con f^{-1}, l'applicazione $f^{-1} : B \longrightarrow A$ tale che per ogni $b \in B$ si ha $f^{-1}(b) = a$ se l'elemento $a \in A$ è tale che $f(a) = b$.

In altre parole f^{-1} è tale che l'applicazione $f^{-1} \circ f : A \longrightarrow A$ ad ogni elemento a di A fa corrispondere se stesso, ovvero $f^{-1} \circ f$ è l'identità su A.

Ad esempio, è facile verificare che l'applicazione $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ tale che $f(n) = n + 1$ è biiettiva, per cui si può determinare la sua inversa che risulta essere l'applicazione $f^{-1} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ tale che $f^{-1}(m) = m - 1$. Si può infatti verificare che per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha $f^{-1} \circ f(n) = f^{-1}(n + 1) = n + 1 - 1 = n$.

L'applicazione $f : \mathbb{N} \longrightarrow P$, dove P è l'insieme dei numeri naturali pari, tale che $f : x \mapsto 2x$ è biiettiva e la sua inversa è quella funzione che ad ogni $y \in P$ fa corrispondere il numero x tale che $x = \frac{y}{2}$.

L'applicazione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $x \mapsto 1 - 3x$ è biiettiva e la sua inversa f^{-1} è tale che $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto \frac{1-y}{3}$.

5 Polinomi e Funzioni Razionali

Un *monomio* è un'espressione algebrica in cui non compaiono addizioni, sottrazioni e divisioni, ma solo moltiplicazioni tra numeri e lettere. Ad esempio $-5a^3bc$ è un monomio in cui i fattori sono il numero -5, il cubo del numero rappresentato dalla lettera a e i numeri rappresentati dalle lettere b e c. Il fattore numerico del monomio è detto *coefficiente*, mentre il prodotto dei fattori letterali è detto *parte letterale*.

Si dice *grado* di un monomio la somma degli esponenti di ciascuno dei fattori letterali. Ad esempio il grado di $-5a^3bc$ è $(3+1+1)=5$, mentre $2x$ è un monomio di primo grado. Il termine *deg* sta ad indicare il grado del monomio, ossia $deg(-5a^3bc)=5$.

Si dice *grado* di un monomio *relativo* a un determinata lettera, l'esponente con il quale quella lettera compare nel monomio. Ad esempio $-5a^3bc$ è un monomio di terzo grado rispetto alla lettera a e di primo grado rispetto a b e c.

Due monomi si dicono *simili* quando hanno la parte letterale formata dalle stesse lettere con lo stesso esponente. Ad esempio $2xy^2z$ e $5xy^2z$ sono simili, mentre a^2bc e $7abc$ non sono simili perché a^2bc è di secondo grado rispetto alla lettera a, mentre $7abc$ è di primo grado rispetto alla lettera a.

Due monomi simili si dicono *uguali* se hanno lo stesso coefficiente. Si dicono *opposti* se i coefficienti sono opposti. Ad esempio $9x^3y$ e $-9x^3y$ sono opposti.

I monomi simili si possono sommare algebricamente tra loro. Ad esempio $3xy$ e $4xy$ sono simili, la loro somma è data da $7xy$. Se invece i monomi non sono simili, la loro somma algebrica si indica scrivendo i monomi l'uno di seguito all'altro con il segno di operazione tra loro. Ad esempio la somma di $3x$, $4xy$ e $-5x^2z$ é data data da $3x+4xy-5z$, mentre la differenza tra $7xy$ e $8yz$ è data da $7xy-8yz$.

La somma algebrica di più monomi è un *polinomio*. Ad esempio $7xy-8yz$ è un polinomio nelle indeterminate x, y e z. Il grado di un polinomio è il massimo grado dei monomi che lo compongono. Ad esempio il grado di $3x^2y+8x+12x^2y$ è 3.

Consideriamo ora polinomi in una sola indeterminata.

Un *polinomio* nella sola indeterminata x e a coefficienti in $\mathbb{R}$ è una scrittura del tipo

$$A(x)=a_o+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=\sum_{i=0}^{n}a_ix_i$$

dove $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sono numeri reali.

Come già osservato, ogni termine a_kx^k è un *monomio* di grado k e il numero reale a_k è il *coefficiente* del termine di grado k.

Come per i monomi, il grado di un polinomio $A(x)$ lo si indica con $deg(A(x))$.

Esempio
$deg(x^3 - \sqrt{3}x^2 + 1) = 3$;
$deg(x^2 + 3) = 2$;
$deg(5) = 0$.

Un polinomio è *nullo* se tutti i suoi coefficienti sono nulli, mentre è *ordinato* secondo le potenze crescenti (o decrescenti) dell'indeterminata, se i monomi che lo compongono sono ordinati secondo le potenze crescenti (o decrescenti) dell'indeterminata.

Operazioni con i polinomi

Siano $A(x)$ e $B(x)$ polinomi nell'indeterminata x di grado m ed n rispettivamente, ovvero

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^m$$

$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m.$$

La somma (rispettivamente la differenza) di $A(x)$ e $B(x)$ è un polinomio $C(x) = A(x) + B(x)$ (rispettivamente $C(x) = A(x) - B(x)$) in cui il coefficiente del monomio di grado k, cioè c_k, è dato dalla somma (rispettivamente dalla differenza) dei coefficienti dei termini di grado k in $A(x)$ e in $B(x)$, ovvero $c_k = a_k + b_k$ (rispettivamente $c_k = a_k - b_k$).

Si osserva che il grado di $C(x)$ è dato dal maggiore dei gradi dei due polinomi $A(x)$ e $B(x)$.

Esempio
$A(x) = x^5 + \sqrt{3}x^3 + 2\sqrt{2}x^2 + \pi$; $B(x) = 7x^3 - \frac{11}{2}x^2 - x + 2$

$A(x) + B(x) = x^5 + (\sqrt{3} + 7)x^3 + (2\sqrt{2} - \frac{11}{2})x^2 - x + \pi + 2$
$A(x) - B(x) = x^5 + (\sqrt{3} - 7)x^3 + (\frac{11}{2} - 2\sqrt{2})x^2 + x + \pi - 2)$.

Il prodotto di $A(x)$ e $B(x)$ è un polinomio $C(x) = A(x) \cdot B(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots c_{n+m}x^{n+m}$ di grado $n + m$ in cui il coefficiente del monomio di grado k, cioè c_k, è così definito:

$$c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + \ldots + a_{k-1}b_1 + a_kb_0 = \sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i}$$

Esempio

$A(x) = \frac{1}{2}x^5 - x^4 + \sqrt{5}x^3 - x^2 + x + 1$; $B(x) = 2x^4 - \frac{1}{4}x^3 - x^2 + 2x + 3$

$$\begin{aligned} A(x) \cdot B(x) = \quad & x^9 - \tfrac{17}{8}x^8 + (2\sqrt{5} - \tfrac{1}{4})x^7 + \\ & -\tfrac{\sqrt{5}}{4}x^6 + (\tfrac{7}{4} - \sqrt{5})x^5 + (2\sqrt{5} - \tfrac{1}{4})x^4 + \\ & +(3\sqrt{5} - \tfrac{13}{4})x^3 - 2x^2 + 5x + 3 \end{aligned}$$

Si ricordano inoltre alcuni prodotti notevoli:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$
$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$$
$$(x \pm y)^3 = x^3 \pm y^3 \pm 3x^2y + 3xy^2$$

In generale per calcolare la potenza n–esima di un binomio si usa il triangolo di Tartaglia:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 ... 1

La riga che contiene solo l'1, è considerata la riga 0–esima. Le righe successive, ovvero la riga i–esima, contiene i coefficienti dei monomi che compaiono nello sviluppo della potenza i–esima di un binomio qualsiasi.

Esempio
Per calcolare $(a+b)^3$ si considera la terza riga del triangolo di Tartaglia:

1 3 3 1

Il termine di posto j della riga corrisponde al coefficiente del monomio $a^{3-(j-1)}b^{j-1}$. Si ha così che il primo termine (j=1) è il coefficiente di a^3, il secondo termine è il coefficiente di a^2b, il terzo di ab^2, mentre il quarto è il coefficiente di b^3. Si ritrova così che $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Esempio

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a-b)^6 = a^6+6a^5(-b)+15a^4(-b)^2+20a^3(-b)^3+15a^2(-b)^4+6a(-b)^5+(-b)^6 =$$
$$= a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$$

Esercizio
Usando i prodotti notevoli calcolare:

1. $(2x+3)(2x-3)(4x^2+9)$;
2. $(x+m)(x-m)(x^2+m^2)(x^4+m^4)$;
3. $(a+b+5c)(a-b+3c)$;
4. $(x+1)^2(x-1)^2(x^2+1)^2$.

Soluzione

1. $(2x+3)(2x-3)(4x^2+9) = (4x^2-9)(4x^2+9) = 16x^4 - 81$;
2. $(x+m)(x-m)(x^2+m^2)(x^4+m^4) = (x^2-m^2)(x^2+m^2)(x^4+m^4) =$
   $= (x^4-m^4)(x^4+m^4) = x^8 - m^8$;
3. $(a+b+5c)(a-b+3c) = (a+b)(a-b) + 3c(a+b) + 5c(a-b) + 15c^2 =$
   $a^2 - b^2 + c(3a+3b+5a-5b) + 15c^2 =$
   $= a^2 - b^2 + 8ac - 2bc + 15c^2$;
4. $(x+1)^2(x-1)^2(x^2+1)^2 = [(x+1)(x-1)]^2(x^2+1)^2 = (x^2-1)^2(x^2+1)^2 =$
   $(x^4-1)^2 = x^8 - 2x^4 + 1$.

Divisione tra polinomi

Per i polinomi non sempre è possibile eseguire la divisione esatta, proprio come accade per i numeri interi. Per tale motivo si introducono le *frazioni algebriche*, dette *funzioni razionali*, come accade per i numeri interi, per i quali si hanno le frazioni numeriche.

In altre parole una frazione algebrica è una espressione algebrica letterale rappresentante il quoziente di monomi e polinomi.

Nell frazioni algebriche, come in quelle numeriche, occorre fare attenzione al denominatore: **NON** deve mai comparirvi il polinomio nullo.

Una frazione algebrica si può trasformare in una ad essa equivalente, moltiplicando o dividendo numeratore e denominatore per uno stesso numero o espressione algebrica non nulla.

Esempio

$$\frac{ab+x}{a^3b^2-ax^2} = \frac{ab+x}{a(a^2b^2-x^2)} = \frac{ab+x}{a(ab-x)(ab+x)} = \frac{1}{a(ab-x)}$$

Per eseguire la somma o la differenza tra frazioni algebriche occorre scomporre in fattori i denominatori e poi riportare le frazioni al denominatore comune. Allo stesso modo per il prodotto di frazioni algebriche: occorre scomporre per poi semplificare.

Esempio
Calcolare $\frac{3x^2+\sqrt{2}x+1}{x-1} - \frac{x^2+5}{x+1}$.

Le due frazioni vengono trasformate in frazioni equivalenti a quelle date, in modo tale che abbiano lo stesso denominatore:

$$\frac{(3x^2+\sqrt{2}x+1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{(x^2+5)(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

Poiché le frazioni hanno lo stesso denominatore, la loro somma algebrica si esegue mantenendo lo stesso denominatore e prendendo come numeratore la somma algebrica dei numeratori:

$$\frac{3x^3+3x^2+\sqrt{2}x^2+\sqrt{2}x+x+1-x^3-5x+x^2+5}{x^2-1} =$$

$$\frac{2x^3+(4+\sqrt{2})x^2+(\sqrt{2}-4)x+6}{x^2-1}$$

Esempio

$$1-\frac{x+y}{x-y}+\frac{x^2+3y^2}{x^2-y^2} = 1-\frac{x+y}{x-y}+\frac{x^2+3y^2}{(x+y)(x-y)} =$$

$$= \frac{x^2-y^2-(x+y)^2+x^2+3y^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{x^2-y^2-x^2-y^2-2xy+x^2+3y^2}{(x+y)(x-y)} =$$

$$= \frac{x^2+y^2-2xy}{(x+y)(x-y)} = \frac{(x-y)^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{x-y}{x+y}.$$

Si considerano ora polinomi ad una sola indeterminata. In questo caso si ha che è sempre possibile eseguire la divisione con resto di due polinomi: dati due polinomi $A(x)$ e $B(x)$ esistono sempre e sono unici due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ tali che:

1. $A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x)$
2. $deg(R(x)) < deg(B(x))$.

Il polinomio $Q(x)$ è detto *quoziente*, mentre $R(x)$ è detto *resto*.

Se $R(x) = 0$, ovvero $R(x)$ è il polinomio nullo, si dice che $A(x)$ è divisibile per $B(x)$.

Per determinare $Q(x)$ e $R(x)$ occorre dapprima confrontare i gradi dei polinomi $A(x)$ e $B(x)$.

Infatti se $deg(A(x)) < deg(B(x))$ allora $Q(x) = 0$, mentre $R(x) = A(x)$.

Invece se $deg(A(x)) \geq deg(B(x))$, il procedimento per il calcolo della divisione con resto tra due polinomi presenta molte analogie con la procedura nota per la divisione con resto tra numeri interi.

Si ricorda mediante un esempio tale procedura.

Esempio

Eseguire $(2x^4 + x^3 - x + 2) : (x^2 + 3)$.

Si considerano i monomi di grado massimo del dividendo e del divisore, ovvero $2x^4$ e x^2. Il loro quoziente è $2x^2$, pertanto si può calcolare il primo resto parziale:

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 + x^3 - x + 2 & x^2 + 3 \\ \cline{2-2} -2x^4 - 6x^2 & 2x^2 \\ \cline{1-1} x^3 - 6x^2 - x + 2 & \end{array}$$

Il primo resto parziale ha grado 3, che è maggiore del grado del polinomio divisore, pertanto si deve proseguire nella divisione calcolando il secondo resto parziale.

Si divide x^3 per x^2, si ottiene x, che è il secondo quoziente parziale, da cui:

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 + x^3 - x + 2 & x^2 + 3 \\ \cline{2-2} -2x^4 - 6x^2 & 2x^2 + x \\ \cline{1-1} x^3 - 6x^2 - x + 2 & \\ -x^3 - 3x & \\ \cline{1-1} -6x^2 - 4x + 2 & \end{array}$$

Il secondo resto parziale ha grado 2, che è lo stesso grado del polinomio divisore, pertanto si deve proseguire nella divisione.

Poiché $-6x^2$ diviso x^2 dà -6, si ha che:

$$\begin{array}{r|l} 2x^4+x^3 \quad -x+2 & \quad x^2+3 \\ \cline{2-2} -2x^4 \quad -6x^2 & 2x^2+x-6 \\ \cline{1-1} x^3-6x^2-x+2 & \\ -x^3 \quad -3x & \\ \cline{1-1} -6x^2-4x+2 & \\ 6x^2 \quad +18 & \\ \cline{1-1} -4x+20 & \end{array}$$

ovvero il terzo resto parziale ha grado 1, minore del grado del polinomio divisore, pertanto non si può proseguire con la divisione.

Si ha così che il quoziente della divisione è $Q(x) = 2x^2 + x - 6$ mentre il resto è $R(x) = -4x + 20$.

Si può verificare che

$$(2x^2+x-6)\cdot(x^2+3)+(-4x+20) = (2x^4+x^3-6x^2)+(6x^2+3x-18)-4x+20 =$$

$$= 2x^4 + x^3 - x + 2.$$

Esercizio

Calcolare $(8a^6x^3 - 12a^2x^2 - 2a^2x) : (2a^2x)$. (I polinomi si considerano nell'indeterminata x, i coefficienti dipendono dal parametro a).

Soluzione

$$\begin{array}{r|l} 8a^6x^3-12a^2x^2-2a^2x & \quad 2a^2x \\ \cline{2-2} -8a^6x^3 & 4a^4x^2-6x+1 \\ \cline{1-1} -12a^2x^2-2a^2x & \\ 12a^2x^2 & \\ \cline{1-1} -2a^2x & \\ 2a^2x^2 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$Q(x) = 4a^4x^2 - 6x + 1$, $R(x) = 0$

6 Equazioni Algebriche

Un' *equazione algebrica* è un'uguaglianza fra due espressioni algebriche che risulta verificata solo da alcuni valori delle variabili che vi compaiono.

Esempio

$$x^2 + y^2 = 5$$

$$(a-b)^2 + 2 = a^2 + c$$

Un' equazione algebrica che è sempre verificata, qualunque siano i valori attribuiti alle variabili che vi compaiono, è una *identità*.

Esempio

$$(a+b)^2 - 2b(a+b) = a^2 - b^2$$

$$x + a + 1 = x - 2 + 3 + a$$

Trovare le soluzioni dell'equazione vuol dire determinare i valori reali da attribuire alle variabili affinchè l'uguaglianza indicata risulti verificata.

Esercizio. Data l'equazione algebrica $x^2 + y^2 - xy + 1 = 2$, determinare se tra le coppie di numeri reali sotto riportate vi è qualche soluzione dell'equazione:

$$(0,1), (1,1), (2,1), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-1,-1)$$

Soluzione. Per ciascuna coppia di numeri reali si sostituiscono i valori al posto della x e della y e si verifica se si ottiene una identità o meno:

$0^2 + 1^2 - 0 \cdot 1 + 1 = 2$	pertanto	$(0,1)$ è soluzione
$1^2 + 1^2 - 1 + 1 = 2$	pertanto	$(1,1)$ è soluzione
$2^2 + 1^2 - 2 + 1 = 4$	pertanto	$(2,1)$ non è soluzione
$2 + 2 - 2 + 1 = 3$	pertanto	$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ non è soluzione
$1 + 1 - 1 + 1 = 2$	pertanto	$(-1,-1)$ è soluzione

Esercizio. Risolvere le seguenti equazioni:

1. $2(x^2 - 3x) - (x-2)(x+2) + 7 = (x-3)^2 - 4$
2. $\frac{x+1}{2} - \frac{x+3}{2} + \frac{2}{3}x = \frac{5x-9}{6}$

Soluzione

1. Si riduce l'equazione in forma normale, ovvero si riduce il secondo membro uguale a zero e a primo membro i sommano i monomi simili:

$$2x^2 - 6x - x^2 + 4 + 7 = x^2 - 6x + 9 - 4$$

$$6 = 0$$

L'equazione è impossibile: non ammette soluzioni.

2. Si determina il m.c.m dei denominatori per poter ridurre l'equazione data ad una ad essa equivalente e a coefficienti interi:

$$\frac{3x+3}{6} - \frac{3x+9}{6} + \frac{4}{6}x = \frac{5x-9}{6}$$

$$3x + 3 - 3x - 9 + 4x = 5x - 9$$

$$x = 3$$

Come mostrano gli esempi, un'equazione può ammettere infinite soluzioni (identità), un numero finito di soluzioni (equazione determinata) o nessuna soluzione (equazione impossibile).

Due o più equazioni si dicono *equivalenti* se gli insiemi delle loro soluzioni coincidono.

Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti reali nella variabile x. Si dice *radice reale* di $P(x)$ ogni numero reale c che sostituito al posto della x annulla $P(x)$, ovvero $P(c) = 0$, risultando così soluzione dell'equazione algebrica associata.

Esempio. Sia $P(x) = x^2 + 3x + 2$, si ha che -2 è radice del polinomio poiché $P(-2) = (-2)^2 + 3 \cdot (-2) + 2 = 0$, mentre 1 non è radice di $P(x)$ poiché $P(1) = 1 + 3 + 2 = 5 \neq 0$.

Se c è una radice del polinomio $P(x)$, allora $P(x)$ è divisibile per $(x - c)$, vale a dire che $P(x) = (x - c) \cdot Q(x)$.

Nell'esempio precedente dividendo per $x + 2$ si ottiene resto 0, mentre dividendo per $x - 1$ si ottiene resto 6.

Vale anche il viceversa: se un polinomio $P(x)$ è divisibile per $(x - c)$, allora c è una radice di $P(x)$.

In altre parole si ha che un numero reale c è radice del polinomio $P(x)$ se e soltanto se $P(x)$ è divisibile per $x - c$.

Una radice c di un polinomio $P(x)$ si dice di *molteplicità* m, dove m è un numero naturale, se $P(x)$ è divisibile per $(x - c)^m$ e non per $(x - c)^{m+1}$.

Una radice di molteplicità 1 si dice *radice semplice*.

Esempio. Il polinomio $P(x) = x^6 + 4x^5 + 4x^4 + x^2 + 4x + 4$ ammette -2 come radice poiché $(-2)^6 + 4(-2)^5 + 4(-2)^4 + 4 \cdot (-2) + 4 = 64 - 128 + 64 + 4 - 8 + 4 = 0$. Eseguendo la divisione di $P(x)$ per $(x + 2)$ si ottiene $P(x) = (x + 2)(x^5 + 2x^4 + x + 2)$. Si verifica che -2 è radice del polinomio $(x^5 + 2x^4 + x + 2)$, infatti $(-2)^5 + 2(-2)^4 - 2 + 2 = 0$. Dividendo $(x^5 + 2x^4 + x + 2)$ per $(x + 2)$ si ottiene $(x^4 + 1)$, da cui $P(x) = (x + 2)(x + 2)(x^4 + 1) = (x + 2)^2(x^4 + 1)$. Si può facilmente verificare che -2 non è radice di $(x^4 + 1)$. Si ha così che $(x + 2)^3$ non divide $P(x)$, mentre $(x + 2)^2$ divide $P(x)$, ovvero -2 è radice di molteplicità 2 di $P(x)$.

Esercizio. Dato il polinomio $P(x) = x^6 + 2x^5 - 7x^2 - 13x + 2$, determinare la molteplicità della radice -2.

Soluzione. Poiché -2 è radice di $P(x)$ si ha che $(x+2)$ divide $P(x)$. Più precisamente $P(x) = (x+2)(x^5 - 7x + 1)$, da cui si può verificare che $(x+2)$ non divide $x^5 - 7x + 1$ poiché $(-2)^5 - 7 \cdot (-2) + 1 = -32 + 14 + 1 \neq 0$. Ciò significa che $(x+2)$ divide $P(x)$, ma $(x+2)^2$ non divide $P(x)$, pertanto -2 è una radice semplice.

Il numero delle radici reali di un polinomio $P(x)$, contate con la loro molteplicità, è sempre minore o uguale al grado del polinomio.

Ad esempio l'equazione algebrica $x^3 + 8 = 0$ ha al più tre soluzioni reali. Si può verificare che vi è una sola soluzione reale.

Dato un polinomio $P(x)$, non sempre è facile trovare tutte le sue possibili radici. Se il grado di $P(x)$ è superiore a 4 non esistono formule risolutive, ovvero formule che aiutano a determinare le radici di $P(x)$. Se invece $deg(P(x)) \leq 4$ tali formule esistono. Di seguito ricordiamo quelle per le equazioni di grado 1 e 2 rispettivamente.

Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti reali nell'indeterminata x di grado 1, ovvero $P(x) = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Si ha che $P(x)$ ammette sempre una e una sola radice reale che si ottiene risolvendo l'equazione algebrica ad esso associata, ovvero risolvendo $ax + b = 0$, da cui $x = \frac{-b}{a}$.

Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti reali nell'indeterminata x di grado 2, ovvero $P(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Per determinare le radici reali di $P(x)$ si determinano le soluzioni reali dell'equazione algebrica corrispondente: $ax^2 + bx + c = 0$. Si calcola il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ ad essa associato e si ha che:

1. se $\Delta < 0$, non vi sono soluzioni reali;
2. se $\Delta = 0$, vi è una sola soluzione reale, di molteplicità 2, data da $\frac{-b}{2a}$;
3. se $\Delta > 0$, vi sono due soluzioni reali distinte date da $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Esempio

1. $x^2 + x + 1 = 0$, $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, pertanto l'equazione non ammette radici reali;
2. $x^2 + 6x + 9 = 0$, $\Delta = 0$, pertanto l'equazione ammette una radice reale di molteplicità 2: $x_1 = x_2 = -3$;
3. $x^2 - 5x + 6$, $\Delta = 25 - 24 = 1$, pertanto l'equazione ammette due radici reali distinte: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Esercizio. Determinare le radici reali di $x^3 - 1$.

Soluzione. Si considera $x^3-1=0$. Tale equazione ammette come radice 1. Dividendo (x^3-1) per $(x-(-1))$ si ottiene $x^3-1=(x+1)(x^2+x+1)$. Le altre radici del polinomio di partenza devono annullare il polinomio (x^2+x+1), ma il Δ associato all'equazione $x^2+x+1=0$ risulta negativo, pertanto (x^3-1) ammette una sola radice reale.

Esercizio. Risolvere l'equazione $x^3-4x^2-11x+30=0$.

Soluzione. Si osserva che 2 è radice del polinomio $P(x)=x^3-4x^2-11x+30$, poiché $P(2)=2^3-4\cdot 2^2-11\cdot 2+30=8-16-22+30=0$. Dividendo $P(x)$ per $(x-2)$ si ottiene $P(x)=(x-2)(x^2-2x-15)$. Si procede come nell'esercizio precedente: $\Delta=4+60=64$, pertanto $x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{2\pm 8}{2}$, $x_1=5$, $x_2=-3$. L'insieme delle soluzioni è dato da $\{-3,2,5\}$.

Equazioni letterali

Un'*equazione letterale* è un'equazione i cui coefficienti sono espressioni contenenti delle lettere che rappresentano dei numeri.

L'equazione

$$ax=b \tag{1}$$

rappresenta una generica equazione di primo grado ridotta in forma normale. Per risolverla si devono considerare i seguenti casi:

1. $a=b=0$
2. $a=0$, $b\neq 0$
3. $a\neq 0$, $b=0$
4. $a\neq 0$, $b\neq 0$

Nel primo caso l'equazione (1) risulta una identità, ovvero $0=0$, quindi ammette infinite soluzioni.

Nel secondo caso l'equazione (1) risulta $0=b$, ovvero l'equazione è impossibile essendo $b\neq 0$.

Nel terzo caso l'equazione (1) risulta $ax=0$, ovvero l'equazione è determinata ed ammette come unica soluzione $x=0$.

Anche nel quarto caso l'equazione (1) risulta determinata. Per ottenere la soluzione si dividono ambo i membri per a (questo è possibile perché $a\neq 0$), ottenendo così $x=\frac{b}{a}$. Si osserva che il terzo caso è un caso particolare di quest'ultimo.

Esercizio. Risolvere la seguente equazione letterale

$$(a^2-b^2)x=a^2+ab-2b^2$$

Soluzione. Si scompongono in fattori ambo i membri dell'equazione:

$$(a+b)(a-b)x = (a+2b)(a-b)$$

Si distinguono tutti i casi possibili:

1. $a-b=0$ e $a+b=0$;
2. $a-b=0$ e $a+b\neq 0$
3. $a-b\neq 0$ e $a+b=0$
4. $a-b\neq 0$ e $a+b\neq 0$

Nel primo caso si ha che $a=b=0$, pertanto, andando a sostituire i valori di a e di b nell'equazione data, si ottiene una identità, quindi l'equazione ammette infinite soluzioni.

Nel secondo caso si ha $a=b$. Sostituendo nell'equazione di partenza si ottiene $(a+b)\cdot 0\cdot x = 3b\cdot 0$, ovvero $0=0$ che è una identità.

Nel terzo caso si ha $a=-b$, per cui l'equazione iniziale risulta $0\cdot(-2b)x = (b)(-3b)$, ovvero $3b^2=0$. Tale equazione risulta impossibile poiché $b\neq 0$ essendo $a-b\neq 0$.

Nel quarto caso si possono dividere ambo i membri dell'equazione per $(a+b)(a-b)$, essendo $(a+b)(a-b)\neq 0$. Si ottiene così che $x=\frac{a+2b}{a+b}$ ovvero l'equazione è determinata.

Equazioni frazionarie

Un'equazione si dice *frazionaria* quando l'incognita compare al denominatore delle espressioni algebriche.

Esempi

- $\frac{1}{2x+2}=5x^2$
- $1-\frac{x+2}{x^2-2x+1}=\frac{x^2}{x-1}$

Esercizio. Risolvere l'equazione algebrica $\frac{x-2}{x^2+x}=\frac{x}{x+1}-\frac{x-2}{x}$.

Soluzione. Prima di cercare le soluzioni dell'equazione, si richiede che le soluzioni cercate non annullino i denominatori, ovvero si richiede che $x^2+x\neq 0$. Ciò comporta $x\neq 0$ e $x\neq -1$.

Per essere risolta, l'equazione deve essere trasformata in una ad essa equivalente:

$$\frac{x-2}{x(x+1)}=\frac{x^2}{x(x+1)}-\frac{(x-2)(x+1)}{x(x+1)}$$

$$x-2=x^2-x^2+x+2$$

$$4=0$$

L'equazione è impossibile.

Esercizio. Risolvere l'equazione algebrica

$$\frac{\frac{x^2-4x+4}{12}}{4x^2-8x} = \frac{\frac{x}{2}-1}{24x}.$$

Soluzione.

$$\frac{(x-2)^2}{12} \cdot \frac{1}{4x(x-2)} = \frac{x-2}{2} \cdot \frac{1}{24x}$$

Discussione: $x \neq 0$, $x \neq 2$.

$$\frac{x-2}{48x} = \frac{x-2}{48x}$$

L'uguaglianza sopra è una identità, pertanto sono soluzioni dell'equazione data tutti i numeri reali diversi da 0 e da 2.

Esercizio. Risolvere la seguente equazione frazionaria a coefficienti letterali:

$$\frac{a^3-b^3}{a-b} + \frac{a^2b+ab^2}{x} = (a+b)^2$$

Soluzione. Affinché l'equazione non perda di significato, deve essere $a-b \neq 0$, ovvero $a \neq b$.

Si discutono i valori di x che annullano il denominatore: $x \neq 0$.

Si può così procedere alla fattorizzazione dei numeratori e denominatori di ambo i membri dell'equazione, così che si possono eseguire eventuali semplificazioni:

$$\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a-b} + \frac{ab(a+b)}{x} = (a+b)^2$$

$$a^2+ab+b^2 + \frac{ab(a+b)}{x} = a^2+2ab+b^2$$

$$\frac{ab(a+b)}{x} = ab$$

$$abx = ab(a+b)$$

Si distinguono i seguenti casi:

1. $ab = 0$;
2. $ab \neq 0$;

Nel primo caso si ha che $a = 0$ o $b = 0$; a e b non possono essere contemporaneamente nulli altrimenti l'equazione perderebbe di significato. In entrambi i casi, cioè se $a = 0$ e $b \neq 0$ o se $a \neq 0$ e $b = 0$, si ottiene una identità: $0 = 0$

Nel secondo caso si possono dividere ambo i membri dell'equazione per ab, essendo $ab \neq 0$, da cui si ha $x = a + b$. Tale soluzione è accettabile se $a + b \neq 0$ ovvero se $a \neq -b$.

7 Progressioni Geometriche e Aritmetiche

Si dice *progressione geometrica* una successione di due o più numeri reali non nulli, tali che il quoziente tra ciascuno di essi e il precedente è costante.

I numeri che costituiscono la progressione geometrica di dicono *termini* o *elementi* della progressione. Il quoziente costante tra ogni termine e il suo precedente si chiama *ragione* della progressione geometrica e lo si indica con q.

Esempio. I numeri $3, 6, 12, 24, 48$ costituiscono una progressione geometrica di ragione 2;

i numeri $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{64}$ costituiscono una progressione geometrica di ragione $-\frac{1}{4}$.

Una sequenza $a_0, a_1, \ldots, a_n$ di numeri reali in progressione geometrica è completamente determinata una volta noti la ragione della progressione q e il primo termine a_0 della sequenza. Infatti in base alla definizione di progressione geometrica si ha che:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 \cdot q \\ a_2 &= a_1 \cdot q = (a_0 \cdot q) \cdot q = a_0 \cdot q^2 \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} \cdot q = (a_{n-2} \cdot q) \cdot q = \ldots = a_0 \cdot q^n \end{aligned}$$

Si osserva inoltre che in una progressione geometrica:

1. se $q > 0$, i termini della progressione hanno tutti lo stesso segno (tutti positivi o tutti negativi);

2. se $q < 0$, i termini sono alternativamente di segno opposto.

Esercizio. In una progressione geometrica il quarto termine è 15 e la ragione è $\frac{1}{3}$. Trovare l'ottavo termine.

Soluzione. Si ha che $a_3 = (\frac{1}{3})^3 a_1$ e $a_7 = (\frac{1}{3})^7 a_1$. Dividendo membro a membro queste due uguaglianze si ottiene : $\frac{a_7}{a_3} = \frac{(\frac{1}{3})^7 a_1}{(\frac{1}{3})^3 a_1} = (\frac{1}{3})^4 = \frac{1}{81}$, da cui

$a_7 = \frac{1}{81} \cdot a_3 = \frac{15}{81} = \frac{5}{27}$.

Somma dei termini consecutivi di una progressione geometrica

Data una progressione geometrica $a_0, a_1, \ldots, a_n$ di ragione q, $q \neq 1$, si ha che la somma dei termini della progressione, ossia $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$, è data dalla seguente formula:

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n = a_0 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Infatti

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n = a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + \ldots + a_0 q^n$$

Raccogliendo il fattore comune a_0 si ottiene:

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n = a_0(1 + q + q^2 + \ldots + q^n)$$

Poiché $q \neq 1$ si può utilizzare l' identità polinomiale

$$(x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + x + 1)(x - 1) = x^{n+1} - 1$$

che si verifica direttamente eseguendo la moltiplicazione al primo membro ed eliminando i termini a due a due opposti, così che:

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n = a_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Si osserva che se $q = 1$ allora $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ è dato dalla somma di $(n + 1)$ termini uguali ad a_0, pertanto $a_0 + a_1 + \ldots + a_n = (n + 1)a_0$.

Esercizio. Calcolare

$$(\tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^3 + (\tfrac{1}{2})^4.$$

Soluzione. Si tratta di quattro termini in progressione geometrica si ragione $q = \frac{1}{2}$ e primo termine $a_0 = \frac{1}{2}$. Poiché n in questo caso vale 3, applicando la formula sopra, si ha che:

$$(\tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^3 + (\tfrac{1}{2})^4 = (\tfrac{1}{2}) \cdot \frac{(\frac{1}{2})^4 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - (\tfrac{1}{2})^4 = \frac{15}{16}$$

Si dice *progressione aritmetica* una successione di tre o più numeri reali, tali che la differenza tra ciascuno di essi e il precedente sia costante.

I numeri che costituiscono una progressione aritmetica si dicono *termini* o *elementi* della progressione e la differenza costante tra un termine e il suo precedente si chiama *ragione* della progressione aritmetica e la si indica con d.

Esempio. I numeri $\frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1$ costituiscono una progressione aritmetica di ragione $-\frac{1}{2}$.

Una sequenza $a_0, a_1, \ldots, a_n$ di numeri reali in progressione aritmetica è completamente determinata una volta noti la ragione della progressione d e il primo termine a_0 della sequenza. Infatti in base alla definizione di progressione aritmetica si ha che:

$$\begin{aligned} &a_1 = d + a_0 \\ &a_2 = d + a_1 = d + (d + a_0) = 2d + a_0 \\ &\vdots \\ &a_n = d + a_{n-1} = d + (d + a_{n-2}) = \ldots = n \cdot d + a_0 \end{aligned}$$

Si osservi che in una progressione aritmetica:

1. se la ragione è positiva, la progressione è crescente;
2. se la ragione è negativa, la progressione è decrescente;
3. se la ragione è nulla, la progressione è costante

e viceversa.

Esercizio. Trovare il decimo termine di una progressione aritmetica di ragione $\frac{1}{5}$, sapendo che il quarto termine vale -1.

Soluzione. Si ha che $d = \frac{1}{5}$, $a_3 = 3 \cdot \frac{1}{5} + a_0$ e $a_9 = 9 \cdot \frac{1}{5} + a_0$. Sottraendo membro a membro la prima uguaglianza dalla seconda, si ha che $a_9 - a_3 = \frac{9}{5} + a_0 - \frac{3}{5} - a_0 = \frac{6}{5}$, da cui $a_9 = \frac{6}{5} + a_3 = \frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5}$.

Somma di due termini equidistanti dagli estremi

In una progressione aritmetica $a_0, a_1, \ldots, a_n$, due termini f e g si dicono equidistanti dagli estremi (a_0 e a_n) se il numero di termini della progressione che precede f è uguale al numero di termini che seguono g.

Si ha che la somma di due termini equidistanti dagli estremi è costante ed è data da $a_0 + a_n$ (somma dei termini estremi).

Infatti se m è il numero di termini che precedono f e quindi che seguono g, si ha che $f = md + a_0$, ovvero $a_0 = f - md$, e $a_n = md + g$. Sommando membro a membro le ultime due uguaglianze si ha che $a_0 + a_n = f + g$, che è quanto si voleva dimostrare.

Somma dei termini consecutivi di una progressione aritmetica

In una progressione aritmetica $a_0, a_1, \ldots, a_n$ la somma dei termini, ossia $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ è data dalla formula:

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \frac{a_0 + a_n}{2}(n + 1).$$

Infatti per la proprietà commutativa, si ha che:

$$2(a_0+a_1+\ldots+a_n) = (a_0+a_n)+(a_1+a_{n-1})+(a_2+a_{n-2})+\ldots+(a_{n-1}+a_1)+(a_n+a_0)$$

Le somme indicate tra parentesi sono somme di termini equidistanti dagli estremi, pertanto la loro somma è costante ed è data dalla somma degli estremi, per quanto visto prima. Pertanto:

$$2(a_0 + a_1 + \ldots + a_n) = \frac{\underbrace{(a_0 + a_n) + \ldots + (a_0 + a_n)}}{(n+1)}$$

da cui

$$(a_0 + a_1 + \ldots + a_n) = (n+1)\frac{(a_0 + a_n)}{2}$$

che è quanto si voleva dimostrare.

8 Disequazioni Algebriche

Si dice *disequazione algebrica* una disuguaglianza tra due espressioni algebriche. In particolare, quando le espressioni algebriche sono dei polinomi, la disequazione si dice *razionale intera*.

Determinare le *soluzioni* della disequazione significa trovare quali valori reali sono da attribuire alle variabili che compaiono nella disequazione affinché questa risulti verificata.

Due disequazioni si dicono *equivalenti* se ammettono le stesse soluzioni.

Una disequazione può essere trasformata in una ad essa equivalente mediante alcune operazioni elementari, che possono essere così riassunte:

1. aggiungendo ad ambo i membri della disequazione lo stesso numero, o la stessa espressione algebrica, si ottiene una disequazione ad essa equivalente;

2. moltiplicando ambo i membri della disequazione per uno stesso numero positivo, si ottiene una disequazione equivalente a quella data;

3. moltiplicando ambo i membri della disequazione per uno stesso numero negativo, si ottiene una disequazione equivalente a quella data purché si cambi il verso della disuguaglianza.

Disequazion razionali intere lineari o di I° grado

Una *disequazione razionale intera lineare* è una disequazione del tipo:

$$ax + b > 0 \qquad \text{oppure} \qquad ax + b < 0 \tag{2}$$

dove a, b sono numeri reali. Si può sempre supporre $a > 0$, infatti se $a < 0$ si può cambiar di segno a tutti i termini della disequazione, cambiando anche il verso della disuguaglianza.

Dalla (2) si ottiene:

$$ax > -b \qquad \text{oppure} \qquad ax < -b$$

da cui, dividendo ambo i membri per il numero positivo a, si ottiene:

$$x > -\frac{b}{a} \qquad \text{oppure} \qquad x < -\frac{b}{a}$$

Esercizio. Risolvere le seguenti disequazioni:

1. $\frac{1}{2}x + 3x - 2 < x + 3$
2. $\frac{2-x}{3+\frac{1}{2}} - \frac{x-\frac{1}{4}}{5-\frac{3}{2}} > \frac{1}{2}(x - \frac{1}{5})$.

Soluzione.

1. Si moltiplicano ambo i membri per 2, così che i denominatori si eliminano:
$$x + 6x - 4 < 2x + 6$$
Si trasportano tutti i termini a primo membro e si riducono i termini simili:
$$5x - 10 < 0$$
da cui si ricava $x < 2$, ovvero la disequazione data è soddisfatta da tutti i valori reali di x minori di 2.

2. Si scrive la disequazione data nella forma seguente:
$$\frac{2(2-x)}{7} - \frac{2(x-\frac{1}{4})}{7} > \frac{1}{2}(x - \frac{1}{5})$$
Si moltiplicano ambo i membri per 14 e poi per 5, ottenendo così:
$$8 - 4x - 4x + 1 > 7x - \frac{7}{5}$$
$$45 - 40x > 35x - 7$$
da cui $-75x > -52$, ovvero $x < \frac{52}{75}$.

Disequazioni razionali intere di II° grado

Una *disequazione razionale intera* di II° grado è una disequazione del tipo

$$ax^2 + bx + c > 0 \tag{3}$$

oppure

$$ax^2 + bx + c < 0 \tag{4}$$

dove a, b, c sono numeri reali, con $a \neq 0$. Si suppone $a > 0$ poichè se $a < 0$ si può sempre cambiar di segno a tutti i termini, cambiando anche verso alla disuguaglianza.

Per risolvere la (3) e la (4) si calcola il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ del polinomio $ax^2 + bx + c$ e si osserva che $ax^2 + bx + c = a \cdot [(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$.

Si distinguono i sequenti casi:

1. $\Delta > 0$: il plinomio ha due radici reali distinte x_1 e x_2. Si può sempre supporre $x_1 < x_2$. Poichè $ax^2 + bx + c = a \cdot [(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}] = a \cdot (x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}) = a(x - x_1)(x - x_2)$, si ha che $ax^2 + bx + c$ rappresenta un numero positivo se si attribuisce ad x un numero minore di x_1 oppure maggiore di x_2. Rappresenta invece un numero negativo se si attribuisce ad x un valore strettamente compreso tra x_1 e x_2. L'espressione $ax^2 + bx + c$ si annulla se $x = x_1$ o se $x = x_2$.

2. $\Delta < 0$: il polinomio non si annulla mai e poichè si può scrivere $ax^2 + bx + c = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$, dove il termine tra quadre è sempre un numero positivo, si ha che qualunque valore si attribuisce alla x il polinomio $ax^2 + bx + c$ rappresenta un numero positivo.

3. $\Delta = 0$: il polinomio ha una sola radice di molteplicità 2, ossia $-\frac{b}{2a}$; poiché $ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2$ si ha che qualunque valore reale diverso da $-\frac{b}{2a}$ si attribuisca alla x, il polinomio $ax^2 + bx + c$ rappresenta un numero positivo.

Esercizio. Risolvere le seguenti disequazioni:

1. $3x^2 < 4x + 7$;

2. $(x - 2)^2 + 5x < 3x - 2$;

3. $25 > 4x(5 - x)$.

Soluzione.

1. Si trasforma la disequazione in una ad essa equivalente: $3x^2 - 4x - 7 < 0$. Si determinano le radici del polinomio $3x^2 - 4x - 7$: $\Delta = 16 + 84 = 100$, pertanto $x_1 = \frac{4-10}{6} = -1$ e $x_2 = \frac{4+10}{6} = \frac{7}{3}$. Per quanto osservato sopra si ha che la disequazione è verificata per ogni valore di x tale che $-1 < x < \frac{7}{3}$, ovvero sono soluzione della disequazione tutti i numeri reali dell'intervallo $(-1, \frac{7}{3})$.

2. La disequazione data è equivalente alla disequazione $x^2 - 4x + 4 + 5x < 3x - 2$, ovvero alla disequazione $x^2 - 2x + 6 < 0$. Calcalando il Δ si

ottiene $\Delta = 4 - 24 < 0$, ovvero si ha che il polinomio $x^2 - 2x + 6$ non si annulla mai e poichè rappresenta sempre un numero positivo, si ha che la disequazione non ammette nessuna soluzione, ovvero nessun valore reale di x verifica l'espressione.

3. La disequazione data è equivalente alla disequazione $25 > 20x - 4x^2$, ovvero $4x^2 - 20x + 25 > 0$. Calcalando il Δ si ottiene $\Delta = 400 - 400 = 0$, ovvero si ha che il polinomio $4x^2 - 20x + 25$ ha una sola radice di molteplicità 2 data da $\frac{5}{2}$, pertanto la disequazione è verificata da ogni valore reale di x diverso da $\frac{5}{2}$.

Se si deve risolvere una disequazione del tipo $P(x) > 0$ (o $P(x) \geq 0$, $P(x) < 0$, $P(x) \leq 0$) dove $P(x)$ è un polinomio di grado maggiore di 2, si cerca di scomporre il polinomio nel prodotto di polinomi di grado inferiore, anche se questo non sempre è facile, né possibile.

Quando tale scomposizione risulta possibile, si procede ragionando sui singoli polinomi che compaiono nella scomposizione. Per capire meglio il procedimento si veda l'esempio che segue.

Esempio. Risolvere la disequazione

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 \geq 0$$

Si scompone il polinomio di terzo grado, per cui la disequzione risulta scritta come:

$$x^2(x-2) - 1 \cdot (x-2) \geq 0$$

ossia

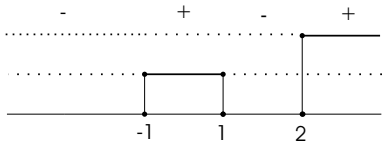
$$(x-2)(x^2-1) \geq 0$$

Si discute il segno di ciascun fattore:

$$\begin{array}{rcl} x - 2 \geq 0 & \text{se} & x \geq 2 \\ x^2 - 1 \geq 0 & \text{se} & x \leq -1 \text{ o } x \geq 1 \end{array}$$

infatti $x^2 - 1$ ha come radici ± 1.

Riportando questi risultati in un grafico in cui gli intervalli di positività di ciascun fattore sono indicati con tratto continuo, mentre gli intervalli in cui i fattori risultano negativi sono tratteggiati, si ha che le soluzioni della disequzione sono tutti i numeri reali x tali che $-1 \leq x \leq 1$ o $x \geq 2$.



Disequazioni razionali fratte

Una disequazione razionale fratta è composta da espressioni in cui compaiono divisori contenenti l'incognita, ovvero è una disequazione che, una volta applicati i principi di equivalenza, è del tipo:

$$\frac{N(x)}{D(x)} > 0 \tag{5}$$

o del tipo

$$\frac{N(x)}{D(x)} < 0 \tag{6}$$

dove $N(x)$ e $D(x)$ sono polinomi nella variabile x.

Per risolvere una disequazione fratta si ricorre alla rappresentazione grafica: su una retta si segna con tratto continuo l'intervallo, o gli intervalli, in cui il polinomio numeratore $N(x)$ risulta positivo e con il tratteggio l'intervallo, o gli intervalli, in cui riuslta negativo. Si fa la stessa cosa per $D(x)$ su un'altra retta. Successivamente si individuano gli intervalli in cui $N(x)$ e $D(x)$ sono concordi e quelli in cui sono discordi. In altre parole in ciascun intervallo si determina il prodotto dei segni, per cui le soluzioni di (5) sono contenute negli intervalli in cui il prodotto dei segni è positivo, mentre le soluzioni di (6) sono contenute negli intervalli in cui il prodotto dei segni è negativo.

Esempio. Risolvere la disequazione $\frac{4}{x+2} > 3 - \frac{x}{x-1}$.

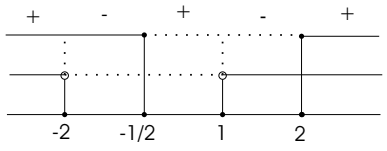
Soluzione. Si trasporta tutto a primo membro, si determina il m.c.m dei denominatori, quindi eseguendo i calcoli si ottiene:

$$\frac{-2x^2 + 3x + 2}{(x+2)(x-1)} > 0$$

Si cambiano i segni a numeratore, cambiando anche verso alla disuguaglianza:

$$\frac{2x^2 - 3x - 2}{(x+2)(x-1)} < 0$$

Si considerano le disequazioni $2x^2 - 3x - 2 > 0$ e $(x+2)(x-1) > 0$. La prima è soddisfatta per $(x < -\frac{1}{2}) \vee (x > 2)$, la seconda per $(x < -2) \vee (x > 1)$. La rappresentazione geometrica risulta:



Si devono considerare gli intervalli in cui il prodotto dei segni è negativo, ovvero la disequazione data è soddisfatta per

$$-2 < x < -\frac{1}{2} \qquad \text{e per} \qquad 1 < x < 2.$$

Esercizio. Risolvere le seguenti disequazioni:

1. $\frac{x+1}{x-1} + 1 \geq \frac{x-2}{x+2} + \frac{14}{5}$;
2. $\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12} > 1$;
3. $\frac{2x-1}{x-3} < \frac{x+1}{x-1}$.

Soluzione.

1.

$$\frac{5(x+1)(x+2) + 5(x-1)(x+2) - 5(x-1)(x-2) - 14(x-1)(x+2)}{5(x-1)(x+2)} \geq 0$$

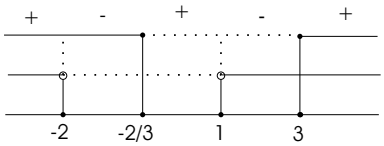
$$\frac{5(x^2+3x+2) + 5(x^2+x-2) - 5(x^2-3x+2) - 14(x^2+x-2)}{5(x-1)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{5(x^2+3x+2-x^2+3x-2) - 9(x^2+x-2)}{5(x-1)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{-9x^2+21x+18}{5(x-1)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{3x^2-7x-6}{(x-1)(x+2)} \leq 0$$

$3x^2 - 7x - 6 \geq 0$ per $(x \leq -\frac{2}{3}) \vee (x \geq 3)$; $(x-1)(x+2) > 0$ per $(x < -2) \vee (x > 1)$. Dalla rappresentazione geometrica



si ha che la disequazione risulta soddisfatta per: $-2 < x \leq -\frac{2}{3}$ e per $1 < x \leq 3$.

2.

$$\frac{x^2-3x+2-x^2+7x-12}{x^2-7x+12} > 0$$

$$\frac{4x-10}{x^2-7x+12} > 0$$

$4x - 10 > 0$ per $x > \frac{5}{2}$; $x^2 - 7x + 12 > 0$ per $(x < 3) \vee (x > 4)$, pertanto la disequazione risulta soddisfatta per: $\frac{5}{2} < x < 3$ e per $x > 4$.

3.

$$\frac{2x^2 - 2x - x + 1 - x^2 + 2x + 3}{(x-1)(x-3)} < 0$$

$$\frac{x^2 - x + 4}{(x-1)(x-3)} < 0$$

$x^2 - x + 4 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; $(x-1)(x-3) > 0$ per $(x < 1) \vee (x > 3)$, pertanto la disequazione risulta soddisfatta per: $1 < x < 3$.

Sistemi di disequazioni

Considerando contemporaneamente più disequazioni si ottiene un sistema di disequazioni. Ad esempio:

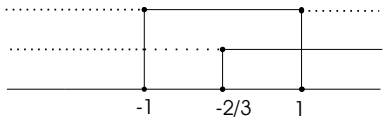
$$\begin{cases} 3x + 2 > 0 \\ x^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

Trovare le soluzioni vuol dire prendere i valori che soddisfano contemporaneamente le equazioni del sistema.

Nell'esempio precedente si ottiene:

$$\begin{cases} x > -\frac{2}{3} \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Le soluzioni delle singole disequazioni vengono rappresentate mediante linea continua in un grafico:



quindi si prendono come soluzioni del sistema quegli intervalli in cui per ogni disequazioni del sistema si ha una linea continua. In questo caso le soluzioni del sistema sono tutti e soli i valori reali di x tali che $-\frac{2}{3} < x \leq 1$.

Se una delle disequazioni di un sistema risulta impossibile, allora anche il sistema risulta tale.

Esempio. Il sistema

$$\begin{cases} x^2 + 1 < 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$$

risulta impossibile perché non esiste nessun valore reale di x che verifica la disequazione $x^2 + 1 < 0$.

Esercizio. Risolvere il sistema di disequazioni

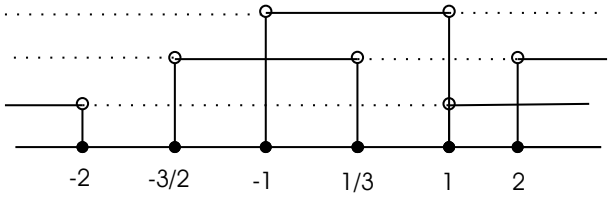
$$\begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ \frac{11}{2x+3} > \frac{5}{2-x} \\ x^2 + x - 2 > 0 \end{cases}$$

Soluzione. Si risolvono separatamente le disequazioni.

La disequazione $x^2 - 1 < 0$ è soddisfatta per $-1 < x < 1$.

La seconda disequazione può essere scritta come $\frac{21x-7}{2x^2-x-6} > 0$. Il numeratore risulta positivo per $x > \frac{1}{3}$, mentre il denominatore risulta positivo per $x < -\frac{3}{2}$ e per $x > 2$. Ricorrendo alla rappresentazione geometrica vista per le disequazioni fratte, si ha che la seconda disequazione è soddisfatta per $-\frac{3}{2} < x < \frac{1}{3}$ e per $x > 2$.

L'ultima disequazione risulta soddisfatta per $x < -2$ e per $x > 1$.



Dalla figura sopra si deduce che il sistema non ammette soluzioni, ovvero le disequazioni sono tra loro incompatibili.

Disequazioni irrazionali

Una disequazione si dice *irrazionale* quando l'incognita compare in una o più espressioni sotto radice.

Si ricorda che se n è un naturale dispari allora la disequazione $[A(x)]^n > [B(x)]^n$ è equivalente alla disequazione $A(x) > B(x)$. Invece se n è pari, in generale $A(x) > B(x)$ non è equivalente a $[A(x)]^n > [B(x)]^n$, a meno che $A(x)$ e $B(x)$ non siano quantità positive o nulle.

Una disequazione irrazionale è una disequazione del tipo

$$C(x) \overset{>}{<} \sqrt{D(x)}$$

o del tipo

$$C(x) \overset{>}{<} \sqrt[n]{D(x)}$$

dove $C(x)$ e $D(x)$ sono polinomi interi o quozienti di polinomi interi nella variabile x.

La disequazione $C(x) > \sqrt{D(x)}$ è equivalente al sistema

$$\begin{cases} D(x) \geq 0 \\ C(x) > 0 \\ [C(x)]^2 > D(x) \end{cases}$$

Infatti la $\sqrt{D(x)}$ ha senso soltanto per quei valori della x per cui $D(x) \geq 0$, da cui segue che $\sqrt{D(x)} \geq 0$, pertanto deve essere $C(x) > 0$, altrimenti la disequazione data risulterebbe assurda. Si ottiene così una disequazione fra quantità positive, quindi si possono elevare al quadrato ambo i membri della disequazione, per cui si ha $[C(x)]^2 > D(x)$.

La disequazione $C(x) < \sqrt{D(x)}$ è equivalente all'insieme dei due sistemi:

$$\begin{cases} D(x) \geq 0 \\ C(x) < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} C(x) \geq 0 \\ [C(x)]^2 < D(x) \end{cases}$$

Le disequazioni $C(x) \overset{>}{<} \sqrt[n]{D(x)}$, con n dispari, sono equivalenti alle disequazioni $C(x)^n \overset{>}{<} D(x)$.

Se invece n è pari, la disequazione $C(x) > \sqrt[n]{D(x)}$ è equivalente al sistema

$$\begin{cases} D(x) \geq 0 \\ C(x) > 0 \\ [C(x)]^n > D(x) \end{cases}$$

mentre la disequazione $C(x) < \sqrt[n]{D(x)}$ è equivalente all'insieme dei due sistemi:

$$\begin{cases} D(x) \geq 0 \\ C(x) < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} C(x) \geq 0 \\ [C(x)]^n < D(x) \end{cases}$$

Esercizio. Risolvere le seguenti disequazioni:

1. $3x + 5 > \sqrt{9x^2 - 6x - 8}$;
2. $\sqrt{10 + 3x - x^2} > x + 2$;
3. $\sqrt[3]{x(x^2 - 4)} > x + 1$;
4. $\sqrt{x - 2} < \sqrt{x - 1}$;

Soluzione.

1. La disequazione $3x + 5 > \sqrt{9x^2 - 6x - 8}$ è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 9x^2 - 6x - 8 \geq 0 \\ 3x + 5 > 0 \\ (3x + 5)^2 > 9x^2 - 6x - 8 \end{cases}$$

Risolvendo le disequazioni del sistema si ottiene:

$$\begin{cases} (x \leq -\frac{2}{3}) \vee (x \geq \frac{4}{3}) \\ x > -\frac{5}{3} \\ x > -\frac{11}{12} \end{cases}$$

ovvero la disequazione data risulta soddisfatta per $(-\frac{11}{12} < x \leq -\frac{2}{3})$ e per $(x \geq \frac{4}{3})$.

2. La disequazione $\sqrt{10 + 3x - x^2} > x + 2$ è equivalente all'insieme dei sistemi

$$\begin{cases} 10 + 3x - x^2 \geq 0 \\ x + 2 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ (x + 2)^2 < 10 + 3x - x^2 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} (x-5)(x+2) \leq 0 \\ x+2 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 2x^2+x-6 < 0 \end{cases}$$

Risolvendo le disequazioni del sistema si ottiene:

$$\begin{cases} (-2 \leq x \leq 5) \\ x < -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -2 \\ -2 < x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

La disequazione data risulta soddisfatta per $-2 < x < \frac{3}{2}$.

3.
$$x(x^2-4) > (x+1)^3$$
$$x^3 - 4x > x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$
$$3x^2 + 7x + 1 < 0$$

$\Delta = 49 - 12$, $x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{37}}{6}$, pertanto la disequazione risulta soddisfatta per $\frac{-7-\sqrt{37}}{6} < x < \frac{-7+\sqrt{37}}{6}$.

4. La disequazione $\sqrt{x-2} < \sqrt{x-1}$ ha senso soltanto per quei valori di x per cui:
$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$$
ovvero per $x \geq 2$. Per tali valori si può facilmente verificare che la disequazione data risulta sempre verificata, infatti elevando al quadrato ambo i membri della disequazione si ottiene $-2 < -1$.

Disequazioni con i valori assoluti

Si considerano i seguenti casi:

1. $|x| \geq a$
2. $|x| \leq a$

Il caso $|x| \geq a$ risulta sempre verificato se a è un numero fissato e $a \leq 0$. Invece, se $a > 0$ esso è verificato se $x \leq -a$ o $x \geq a$.

Il caso $|x| \leq a$ non è mai verificato se $a < 0$. Invece, se $a \geq 0$ risulta verificato se $-a \leq x \leq a$.

Si considera ora il caso generale ovvero si considera una disequazione del tipo $|C(x)| \leq a$ e del tipo $|C(x)| \geq a$, dove $C(x)$ è un polinomio o il quoziente di polinomi nella variabile x e a è un numero reale positivo.

Risolvere la disequazione $|C(x)| \leq a$ equivale a trovare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} C(x) \leq a \\ C(x) \geq -a \end{cases}$$

Risolvere la disequazione $|C(x)| \geq a$ equivale a prendere l'unione delle soluzioni delle due disequazioni:

$$C(x) > a \qquad\qquad C(x) < -a.$$

Esercizio. Risolvere le seguenti disequazioni:

1. $|x^2 - 9x + 7| < 7$;
2. $|x^2 - 2x - 9| \geq 6$;

Soluzione.

1. La disequazione $|x^2 - 9x + 7| < 7$ risulta equivalente al sistema

$$\begin{cases} x^2 - 9x + 7 < 7 \\ x^2 - 9x + 7 > -7 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x^2 - 9x < 0 \\ x^2 - 9x + 14 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(x-9) < 0 \\ (x-2)(x-7) > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < x < 9 \\ (x < 2) \vee (x > 7) \end{cases}$$

pertanto il sistema è verificato per $0 < x < 2$ e per $7 < x < 9$.

2. Per risolvere la disequazione $|x^2-2x-9| \geq 6$ si risolvono le disequazioni $x^2-2x-9 \geq 6$ e $x^2-2x-9 \leq -6$, quindi si prende l'unione delle loro soluzioni. La disequazione $x^2 - 2x - 9 \geq 6$, ossia $x^2 - 2x - 15 \geq 0$, ammette come soluzioni tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $x \leq -3$ oppure $x \geq 5$. La disequazione $x^2 - 2x - 9 \leq -6$, ossia $x^2 - 2x - 3 \leq 0$, ammette come soluzioni tutti $x \in \mathbb{R}$ tali che $-1 \leq x \leq 3$. Unendo tali solouzioni si ha che la disequazione $|x^2 - 2x - 9| \geq 6$ risulta soddisfatta da tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $x \leq -3$ oppure $-1 \leq x \leq 3$ oppure $x \geq 5$.

Il modo di risolvere le disequazioni irrazionali sopra illustrato deve essere modificato se la disequazione da risolvere risulta del tipo $|A(x)| < B(x)$ o del tipo $|A(x)| > B(x)$, dove $B(x)$ non è un numero ma un'espressione algebrica nella variabile x.

Si considera il caso $|A(x)| < B(x)$. Si osserva che $A(x)$ può assumere valori negativi o non negativi. Quindi per eliminare il modulo si devono considerare il caso in cui $A(x) \geq 0$ e il caso in cui $A(x) < 0$, ovvero le soluzioni della disequazione $|A(x)| < B(x)$ sono date dall'unione delle soluzione dei due sistemi:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) < B(x) \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} A(x) < 0 \\ -A(x) < B(x) \end{cases}$$

Esercizio. Risolvere la disequazione $|5x - 2| < x$.
Soluzione. La disequazione $|5x - 2| < x$ equivale a risolvere i sistemi

$$\begin{cases} 5x - 2 \geq 0 \\ 5x - 2 < x \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 5x - 2 < 0 \\ -5x + 2 < x \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x \geq \frac{2}{5} \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x < \frac{2}{5} \\ x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

Le soluzioni del primo sistema sono tutti e soli gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $\frac{2}{5} \leq x < \frac{1}{2}$. Le soluzioni del secondo sistema sono tutti e soli gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{5}$. Unendo le soluzioni dei due sistemi si ottiene che la disequazione $|5x - 2| < x$ è soddisfatta da tutti a soli gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$.

Si considera il caso $|A(x)| > B(x)$. Si osserva che $A(x)$ può assumere valori negativi o non negativi, pertanto per poter eliminare il modulo si deve considerare il caso $A(x) \geq 0$ o $A(x) < 0$. Si ottengono così i sistemi

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) > B(x) \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} A(x) < 0 \\ -A(x) > B(x) \end{cases}$$

Le soluzioni della disequazione $|A(x)| > B(x)$ sono l'unione delle soluzioni dei due sistemi.

Esercizio. Risolvere la disequazione $|x^2 + x| > 2x + 2$.

Soluzione. La disequazione $|x^2 + x| > 2x + 2$ risulta equivalente ai due sistemi:

$$\begin{cases} x^2 + x \geq 0 \\ x^2 + x > 2x + 2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2 + x < 0 \\ -x^2 - x > 2x + 2 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} (x \leq -1) \vee (x \geq 0) \\ (x < -1) \vee (x > 2) \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} -1 < x < 0 \\ -2 < x < -1 \end{cases}$$

Il primo sistema ammette come soluzioni tutti e soli gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $x < -1$ oppure $x > 2$, mentre il secondo sistema non ammette soluzioni, pertanto le soluzioni della disequazione coincidono con le soluzioni del primo sistema.

Quando in una disequazione compare più di una disequazione in modulo, occorre esaminare tutta la casistica possibile, come accade nell'esempio sotto riportato.

Esempio. Risolvere la disequazione $|x - 3| + |6 - x| \leq x$.

Si osserva immediatamente che $x > 0$. Infatti $x - 3$ e $6 - x$ non si annullano contemporaneamente per lo stesso valore di x, per cui $|x - 3| + |6 - x| > 0$, pertanto $x > 0$. Inoltre $x - 3 \geq 0$ se $x \geq 3$ e $6 - x \geq 0$ se $x \leq 6$, pertanto si distinguono i casi:

a. $0 < x < 3$: la disequazione diventa $3 - x + 6 - x \leq x$ da cui $x \geq 3$ che è impossibile;

b. $3 \leq x \leq 6$: la disequazione diventa $x - 3 + 6 - x \leq x$ che dà $x \geq 3$, ovvero $3 \leq x \leq 6$;

c. $x > 6$: la disequazione diventa $x - 3 + x - 6 \leq x$, da cui $6 < x \leq 9$.

Unendo le soluzioni dei tre casi, ovvero dei tre sistemi, si ottiene che $|x - 3| + |6 - x| \leq x$ è soddisfatta da tutti e soli gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $3 \leq x \leq 9$.

9 Geometria Analitica: Retta e Parabola

Coordinate cartesiane nel piano

Si fissano sul piano due rette orientate non parallele. Il loro punto di incontro si dice *origine* O, le rette orientate, ovvero gli *assi coordinati*, sono dette *asse delle* x o delle *ascisse* e *asse delle* y o delle *ordinate* rispettivamente.

Dato un punto P del piano, si conducano da esso le parallele agli assi e siano A e B i loro punti di intersezione con l'asse delle x e delle y rispettivamente.

Fissata una unità di misura, sia a la misura del segmento OA e b la misura del segmento OB. I numeri a e b sono detti rispettivamente *ascissa* e *ordinata* del punto P e costituiscono le *coordinate cartesiane* del punto P. Così facendo ad ogni punto P del piano corrisponde una coppia di numeri reali.

Vale anche in viceversa. Siano a e b numeri reali, se entrambi sono positivi si traccia un segmento OA di lunghezza a con A sul semiasse positivo delle x e un segmento OB di lunghezza b con B sul semiasse positivo delle y.

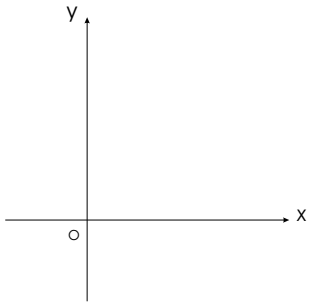
Se invece a e b sono entrambi negativi, si tracciano i segmenti OA e OB, di lunghezza $-a$ e $-b$ rispettivamente, con A e B appartenenti al semiasse negativo delle x e delle y rispettivamente.

Analogamente nei casi in cui $a > 0$, $b < 0$ e $a < 0, b > 0$.

Indipendentemente dalla posizione di A e di B rispetto ad O, la parallela all'asse y condotta da A e la parallela all'asse x condotta da B si incontrano in un punto P che ha a per ascissa e b per ordinata.

Ciò significa che esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e le coppie ordinate di numeri reali.

Nel seguito considereremo sempre assi cartesiani ortogonali, ovvero l'asse x e l'asse y sono fra loro perpendicolari.



Ricordiamo alcune formule:

- Distanza di due punti: siano A e B punti di coordinate (x_a, y_a) e (x_b, y_b) rispettivamente; la distanza tra A e B è data dalla formnula

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}.$$

- Coordinate del punto medio di un segmento: siano A e B punti di coordinate (x_a, y_a) e (x_b, y_b) rispettivamente; il punto medio M del segmento di estremi A e B ha coordinate:

$$M = (\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2})$$

La retta

Sia Oxy un sistema di assi cartesiani fissato nel piano. Siano P_1 e P_2 punti del piano di coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2) rispettivamente.

L'equazione della retta r passante per P_1 e per P_2 è data da:

1. $x = x_1$ se $x_1 = x_2$, ovvero la retta risulta parallela all'asse y;
2. $y = y_1$ se $y_1 = y_2$, ovvero la retta risulta parallela all'asse x;
3. $$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{7}$$
   se $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$, ovvero la retta non è parallela ad alcuno degli assi coordinati.

Ponendo $a = y_2 - y_1$, $b = x_1 - x_2$ e $c = x_2y_1 - x_1y_2$, l'equazione (7) risulta:

$$ax + by + c = 0 \tag{8}$$

L'equazione (8) è detta *equazione cartesiana* della retta perché tutti e soltanto i punti della retta r hanno per coordinate coppie di numeri reali che soddisfano tale equazione.

Si osservi che se Q è un punto del piano non appartenente ad r, allora le sue coordinate non soddisfano l'equazione (8). Ciò significa che esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti della retta e le soluzioni della sua equazione cartesiana.

Vale anche il viceversa di tale affermazione: ogni equazione di primo grado in due variabili rappresenta una retta, ovvero non esistono equazioni del tipo $ax+by+c = 0$ le cui infinite soluzioni rappresentano punti del piano che non stanno sulla stessa retta.

Esercizio. Determinare le equazioni delle rette su cui si trovano i lati del triangolo di vertici $A = (0, 2)$, $B = (0, 4)$ e $C = (-6, 4)$.

Soluzione. Per determinare la retta $r(A, B)$, ossia la retta passante per A e B, si controllano prima le coordinate dei punti. Infatti si osserva che A e B hanno la stessa ascissa, per cui $r(A, B)$ ha equazione $x = 0$ (asse y).

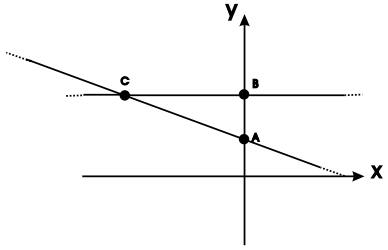
La stessa cosa accade per la retta $r(B, C)$: B e C hanno la stessa ordinata, per cui $r(B, C)$ ha equazione $y = 4$.

Invece A e C hanno ascisse diverse e ordinate diverse, per cui la retta $r(A, C)$ ha equazione:

$$\frac{x+6}{6} = \frac{y-4}{2-4}$$

$$x + 6 = 12 - 3y$$

$$x + 3y - 6 = 0.$$



Se nell'equazione $ax + by + c = 0$ si ha $b \neq 0$, si pone $m = -\frac{a}{b}$ e $q = -\frac{c}{b}$, ottenendo così l'equazione:

$$y = mx + q \tag{9}$$

L'equazione (9) è l'*equazione esplicita* della retta, mentre la (8) è l'*equazione implicita* della retta.

Il termine noto q dell'equazione (9) rappresenta l'ordinata del punto di intersezione tra la retta e l'asse y. Infatti per $x = 0$ (equazione dell'asse y) dalla (9) si ottiene $y = q$.

Invece m prende il nome di *coefficiente angolare* della retta. Si osservi che

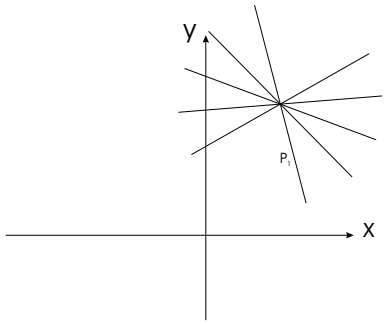
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

poichè $m = -\frac{a}{b}$, con $a = y_2 - y_1$ e $b = x_1 - x_2$.

Si può inoltre osservare che più grande è m in valore assoluto, più grande risulta l'angolo che la retta forma con l'asse delle x.

Due rette r ed s, di coefficiente angolare m_r e m_s rispettivamente, risultano *parallele* se $m_r = m_s$. Risultano invece *perpendicolari* se $m_r \cdot m_s = -1$, ovvero $m_s = -\frac{1}{m_r}$.

Si dice *fascio proprio* di rette l'insieme di tutte e sole le rette di un piano che hanno uno stesso punto in comune, detto centro del fascio.



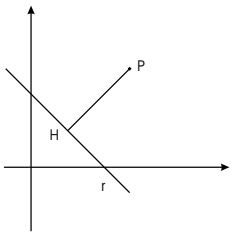
Sia P_1, di coordinate (x_1, y_1), il centro di un fascio proprio. L'equazione del fascio proprio di centro P_1, ossia l'equazione di ogni retta passante per P_1, è data da:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \tag{10}$$

Esercizio. Scrivere la perpendicolare alla retta $r : 3x-5y = 10$ passante per $P = (1, 2)$.

Soluzione. Dall'equazione della retta r si ricava il coefficiente angolare $m = -\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$, ovvero si trasforma in forma esplicita l'equazione della retta r, quindi si divide per il coefficiente di y. La retta s perpendicolare ad r ha coefficiente angolare $m_s = -\frac{1}{\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}$, pertanto utilizzando la (10) si ha che s ha equazione $y - 2 = -\frac{5}{3}(x - 1)$ ovvero $5x + 3y - 11 = 0$.

Ricordiamo infine la formula della distanza di un punto da una retta.



Sia P un punto di coordinate (x_1, y_1) e sia r una retta di equazione $ax + by + c = 0$. La distanza d di P da r, ovvero la lunghezza del segmento PH, è data da:

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{11}$$

Esercizio. Determinare la distanza del punto P di coordinate $(2, -3)$ dalla retta di equazione $3x - 5y + 1 = 0$.

Soluzione. Per la (11) si considera il primo membro dell'equazione della retta, al posto della x si mette l'ascissa del punto P, al posto della y si mette l'ordinata di P, quindi si prende il valore assoluto del numero così ottenuto:

$$|3 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) + 1| = |6 + 15 + 1| = 22$$

Dall'equazione della retta si prendono i quadrati dei coefficienti di x e di y, si esegue la loro somma e se ne estrae la radice quadrata:

$$\sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$$

Si ha così che la distanza tra P e la retta r è data da:

$$\frac{22}{\sqrt{34}} = \frac{11\sqrt{34}}{17}$$

Esercizi di riepilogo sulla retta

1. Date le rette $r_1 : 4x + y - 8 = 0$, $r_2 : 6x - 4y + 4 = 0$ e il punto $P = (2, 1)$, determinare: la retta per P e parallela a r_1; la retta per P e parallela a r_2; la retta per P e perpendicolare a r_1; la retta per P e passante per il punto di intersezione tra r_1 e r_2.
   Soluzione. Indicando con m_1 e m_2 i coefficienti angolari di r_1 e r_2 rispettivamente, si ha che $m_1 = -4$ e $m_2 = \frac{3}{2}$.

   La retta per P e parallela a r_1 ha equazione $y - 1 = -4(x - 2)$, ovvero $y = -4x+9$; la retta per P e parallela a r_2 ha equazione $y-1 = \frac{3}{2}(x-2)$, ovvero $3x-2y-4 = 0$; la retta per P e perpendicolare a r_1 ha equazione $y - 1 = \frac{1}{4}(x - 2)$, ovvero $x - 4y + 2 = 0$.

   Le coordinate del punto Q comune a r_1 e r_2 sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} 4x + y - 8 = 0 \\ 6x - 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

   ovvero

$$\begin{cases} y = -4x + 8 \\ 6x + 16x - 32 + 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -4x + 8 \\ 22x = 28 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{56}{11} + 8 \\ x = \frac{14}{11} \end{cases}$$

   pertanto $Q = (\frac{14}{11}, \frac{32}{11})$ e la retta $r(P, Q)$ ha equazione:

$$\frac{x - 2}{\frac{14}{11} - 2} = \frac{y - 1}{\frac{32}{11} - 1}$$

$$\frac{x - 2}{-8} = \frac{y - 1}{21}$$

$$\frac{21(2 - x)}{8 \cdot 21} = \frac{8(y - 1)}{8 \cdot 21}$$

$$21x + 8y - 50 = 0.$$

2. Trovare la retta passante per $P = (1, 3)$ e perpendicolare alla retta passante per $A = (0, -2)$ e per $B = (1, 1)$.

   Soluzione. La retta $r(A, B)$ ha coefficiente angolare dato da $\frac{1-(-2)}{1-0} = 3$, per cui la retta cercata ha equazione $y - 3 = -\frac{1}{3}(x - 1)$ ovvero $x + 3y - 10 = 0$.

3. Trovare i punti della retta $r : y = x + 1$ che distano $\sqrt{5}$ dall'origine O.

   Soluzione. Un punto P appartenente alla retta r ha coordinate del tipo $(x, x + 1)$.

   Per ipotesi la distanza di P da O vale $\sqrt{5}$, ovvero:

   $$\sqrt{(x-0)^2 + (x+1-0)^2} = \sqrt{5}$$

   Elevando al quadrato ambo i membri dell'uguaglianza sopra si ottiene l'equazione $x^2 + x - 2 = 0$ che ammette come soluzioni $x_1 = -2$ e $x_2 = 1$, per cui i punti P cercati hanno coordinate $(-2, -1)$ e $(1, 2)$.

4. Determinare la distanza delle due rette parallele $r : 3x + y - 3\sqrt{10} = 0$ e $s : 6x + 2y + 5\sqrt{10} = 0$.

   Soluzione. Si prende un punto P appartenente alla retta r, ossia $P = (\sqrt{10}, 0)$. La distanza tra r ed s è data dalla distanza tra P ed s, ovvero da:

   $$d(P, s) = \frac{|6\sqrt{10} + 2 \cdot 0 + 5\sqrt{10}|}{\sqrt{36 + 4}} = \frac{11\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} = \frac{11}{2}.$$

5. Siano A e B le intersezioni della retta $r : x + y - 1 = 0$ con gli assi cartesiani. Trovare l'equazione dell'asse del segmento AB.

   Soluzione. Detto A il punto di intersezione di r con l'asse x e B il punto di intersezione di r con l'asse y, si ha che $A = (1, 0)$ e $B = (0, 1)$.

   L'asse del segmento AB è quella retta passante per il punto medio del segmento e perpendicolare alla retta r. Poiché $M = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e il coefficiente angolare di r è $m = -1$, si ha che l'asse di AB ha equazione:

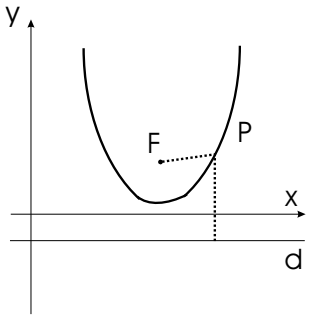
   $$y - \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2}$$
   $$y = x$$

   ovvero l'asse di AB è la bisettrice del I° e III° quadrante.

La parabola

Data una retta d e un punto F non appartenente alla retta d, si dice *parabola* di fuoco F e direttrice d il luogo geometrico dei punti del piano

equidistanti da d e da F.



Il punto F e la retta d sono detti rispettivamente *fuoco* e *direttrice* della parabola.

Fissato nel piano un sistema Oxy di assi cartesiani ortogonali che ha per origine un punto del piano distinto dal punto medio del segmento che dà la distanza tra d e F e ha come asse x una retta parallela alla direttrice, allora la parabola è rappresentata dall'equazione:

$$y = ax^2 + bx + c \tag{12}$$

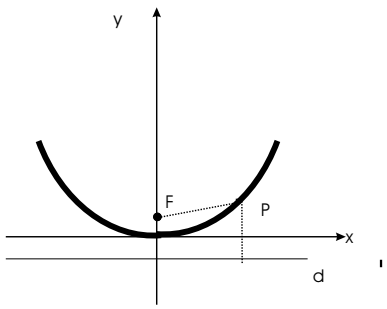
con a, b, c numeri reali e $a \neq 0$. La parabola ha:

1. per vertice il punto V di coordinate $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$, dove $\Delta = b^2 - 4ac$;
2. per asse di simmetria la retta parallela all'asse y di equazione $x = -\frac{b}{2a}$
3. per fuoco il punto di coordinate $(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a})$
4. per direttrice la retta parallela all'asse x di equazione $y = -\frac{1+\Delta}{4a}$

Traslando il sistema di riferimento Oxy in modo tale che l'origine del nuovo sistema di riferimento coincida con il vertice V della parabola, l'equazione (12) della parabola risulta:

$$y = ax^2 \tag{13}$$

che è detta equazione *normale* o *canonica* della parabola.

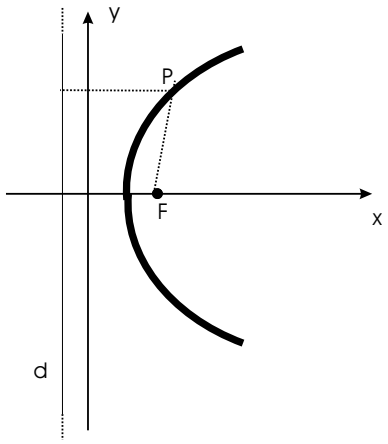


Se nell'equazione (12) il coefficiente a risulta positivo, allora il vertice della parabola è il punto che ha minima ordinata e si dice che la parabola volge la *concavità verso l'alto*. Invece, se il coefficiente a risulta negativo, allora il vertice della parabola è il punto che ha massima ordinata e si dice che la parabola volge la *concavità verso il basso*.

Scambiando fra loro gli assi coordinati l'equazione (12) risulta: $x = ay^2 + by + c$

Tale equazione è l'equazione di una parabola che ha:

1. per vertice il punto V di coordinate $(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a})$, dove $\Delta = b^2 - 4ac$;
2. per asse di simmetria la retta parallela all'asse x di equazione $y = -\frac{b}{2a}$
3. per fuoco il punto di coordinate $(\frac{1-\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a})$
4. per direttrice la retta parallela all'asse y di equazione $x = -\frac{1+\Delta}{4a}$



Esercizi sulla parabola

1. Determinare a, b, c in modo tale che la parabola $y = ax^2 + bx + c$ passi per i punti $A = (2, 7)$, $B = (-4, 16)$ e $C = (-8, 12)$. Trovare poi il vertice, il fuoco e la direttrice.

   Soluzione. Affinché la parabola passi per i punti indicati, è necessario che tali punti verifichino contemporaneamente l'equazione $y = ax^2 + bx + c$ ovvero:

   $$\begin{cases} 4a + 2b + c = 7 \\ 16a - 4b + c = 16 \\ 64a - 8b + c = 12 \end{cases}$$

   Per risolvere il sistema sopra si sostituisce l'equazione $64a - 8b + c = 12$ con l'equazione che si ottiene sottraendo da essa l'equazione $16a - 4b +$

$c = 16$, vale a dire $48a - 4b = -4$, ossia $12a - b = -1$, da cui $b = 12a + 1$. Pertanto il sistema risulta:

$$\begin{cases} 4a + 24a + 2 + c = 7 \\ 16a - 48a - 4 + c = 16 \\ b = 12a + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 28a + c = 5 \\ -32a + c = 20 \\ b = 12a + 1 \end{cases}$$

Si sostituisce l'equazione $-32a + c = 20$ con l'equazione che si ottiene sottraendo $-32a + c = 20$ a $28a + c = 5$:

$$\begin{cases} 28a + c = 5 \\ 60a = -15 \\ b = 12a + 1 \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema si ottiene $a = -\frac{1}{4}$, $b = -2$ e $c = 12$, per cui la parabola cercata ha equazione $y = -\frac{1}{4}x^2 - 2x + 12$.

L'ascissa del vertice V è data da $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{\frac{1}{2}} = -4$. Per trovare l'ordinata di V è sufficiente sostituire il valore di x_V nell'equazione della parabola, poiché V è un punto della parabola. Si ottiene $V = (-4, 16)$.

Per trovare le coordinate di F e l'equazione di d si utilizzano le formule ricordate sopra, ovvero: $F = (-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}) = (-4, 15)$ mentre $d : y = -\frac{1+\Delta}{4a}$ cioè $d : y = 17$.

2. Determinare a, b, c in modo che la parabola $y = ax^2 + bx + c$ passi per il punto $A = (3, 1)$ e abbia per vertice il punto $V = (-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4})$.

   Soluzione. Si ha:

$$\begin{cases} 9a + 3b + c = 1 \\ \frac{9}{4}a - \frac{3}{2}b + c = -\frac{5}{4} \\ -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

   Dalla terza equazione si ha $b = 3a$, per cui sostituendo tale espressione nelle altre equazioni, si ottiene:

$$\begin{cases} 18a + c = 1 \\ -9a + 4c = -5 \\ b = 3a \end{cases}$$

   Si sostituisce $18a + c = 1$ con l'equazione che si ottiene sommando ad essa l'equazione $2 \cdot (-9a + 4c = -5)$, ossia con $9c = -9$, da cui $c = -1$, $a = \frac{1}{9}$ e $b = \frac{1}{3}$. Pertanto la parabola ha equazione $y = \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}x - 1$.

3. Calcolare i coefficienti a, b, c della parabola $y = ax^2 + bx + c$ sapendo che passa per i punti $(-1, 1)$, $(2, 1)$ ed è tangente alla retta $y = x + 3$.

   Soluzione. Dal passaggio per i punti $(-1, 1)$ e $(2, 1)$ si ricava il sistema:

$$\begin{cases} a - b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases}$$

Sottraendo la prima equazione dalla seconda, si ottiene $a = -b$ e $c = 2b + 1$, per cui l'equazione della parabola si può scrivere come $y = -bx^2 + bx + 2b + 1$.

Poichè la retta $y = x + 3$ risulta tangente alla parabola, si ha che il sistema:

$$\begin{cases} y = -bx^2 + bx + 2b + 1 \\ y = x + 3 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione. Questo accade se il Δ associato all'equazione $bx^2 - x(b-1) - 2(b-1)$ (che si ottiene sostituendo l'espressione di y della seconda equazione nella prima equazione) risulta nullo, ovvero $(b-1)^2 + 8b(b-1) = 0$.

Svolgendo i calcoli si trovano due valori per b: $b_1 = \frac{1}{9}$ e $b_2 = 1$. Pertanto la parabola cercata, o meglio le parabole, hanno equazione $y = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{9}x + \frac{11}{9}$ e $y = -x^2 + x + 3$.

4. Scrivere l'equazione della tangente alla parabola $y = x^2 - 3x + 2$ nel punto P di ascissa 3.

   Soluzione. Si determinano le coordinate del punto P: $y = 9 - 9 + 2 = 2$, ovvero $P = (3, 2)$.

   La tangente t alla parabola nel punto P è una retta del fascio proprio di centro P, pertanto la sua equazione è del tipo $y - 2 = m(x - 3)$, ovvero $t : y = m(x - 3) + 2$.

   Essendo t tangente, si ha che il sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x + 2 \\ y = m(x - 3) + 2 \end{cases}$$

   ammette un'unica soluzione. Questo significa che il Δ dell' equazione $x^2 - x(3 + m) + 3m = 0$ è nullo, ovvero $(3 + m)^2 - 12m = 0$, da cui $m = 3$. Si ha così che la tangente t ha equazione $y = 3x - 7$.

La Circonferenza

Si dice *circonferenza* il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto *centro*.

Dato un sistema di assi cartesiani ortogonali nel piano, per scrivere l'equazione della circonferenza di centro $C = (x_0, y_0)$ e raggio r, si deve esprimere il fatto che la distanza da C di un generico punto $P = (x, y)$ della circonferenza è uguale a r, ovvero $\overline{PC}^2 = r^2$. Poiché $\overline{PC}^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ si ottiene

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \tag{14}$$

La (14) è detta *equazione cartesiana* della circonferenza.

Se il centro C coincide con l'origine O del sistema di riferimento, l'equazione cartesiana risulta

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Eseguendo i calcoli nella (14) e ponendo $-2x_0 = a$, $-2y_0 = b$ e $x_0^2 + y_0^2 - r^2 = c$, l'equazione cartesiana risulta scritta nella forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \tag{15}$$

La (15) è detta *equazione normale* della circonferenza. E' una equazione algebrica di II° grado nelle variabili x e y in cui manca il termine in xy e i coefficienti di x^2 e y^2 valgono uno.

Viceversa, un' equazione del tipo $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ rappresenta una circonferenza solo se $(\frac{a}{2})^2 + (\frac{b}{2})^2 - c > 0$ e in tal caso si ha che il centro C ha coordinate $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ e il raggio r è dato da $r = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + (\frac{b}{2})^2 - c}$.

Esercizi sulla circonferenza

1. Scrivere l'equazione della circonferenza di centro $C = (1, -2)$ e passante per il punto $P = (2, 3)$.

   Soluzione. Il raggio della circonferenza richiesta è dato dalla distanza di P da C, ossia $r = \overline{PC} = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$. Pertanto l'equazione cercata è data da $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 26$.

2. Scrivere l'equazione della circonferenza di centro $C = (-4, 1)$ e tangente all'asse y.

   Soluzione. Il raggio della circonferenza richiesta è dato dalla distanza di C dall'asse y, che corrisponde al valore assoluto dell'ascissa di C, ossia $r = |-4| = 4$, quindi l'equazione cercata risulta $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 16$.

3. Determinare le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 15 = 0$ passanti per il punto $A = (4, -1)$.

   Soluzione. Il punto A è esterno alla circonferenza perché la distanza di A da C è maggiore del raggio della circonferenza. Infatti poiché $C = (-2, 1)$ si ha che $\overline{AC} = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{10}$, ma $r = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 15} = 2\sqrt{5}$, da cui $\overline{AC} > r$.

   Essendo A esterno alla circonferenza, da esso escono due tangenti.

   Le tangenti alla circonferenza sono rette del tipo $y + 1 = m(x - 4)$.

   Per determinare le equazioni delle tangenti si impone che la distanza di C da una retta del tipo $y + 1 = m(x - 4)$ sia pari al raggio. Si ha così che

   $$\frac{|m(-2-4) - 1 - 1|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{5}$$

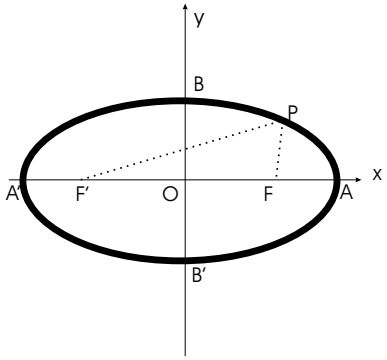
ossia

$$\frac{(6m+2)^2}{m^2+1} = 20$$

Svolgendo i calcoli si ottiene $36m^2+4+24m = 20m^2+20$, $2m^2+3m-2 = 0$, da cui $m = -2$ e $m = \frac{1}{2}$. Pertanto le equazioni delle tangenti risultano $y = -2x + 7$ e $y = \frac{1}{2}x - 3$.

L'Ellisse

Si dice *ellisse* il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti *fuochi*.



Per determinare l'equazione cartesiana dell'ellisse si sceglie un sistema di riferimento cartesiano ortogonale in cui l'asse delle x coincide con la retta passante per i due fuochi F e F', mentre l'asse delle y coincide con la perpendicolare alla retta $r(F, F')$ passante per il punto medio del segmento FF'.

Posto $2c = \overline{FF'}$, si ha che nel sistema di riferimento fissato F e F' hanno coordinate $(c, 0)$ e $(-c, 0)$ rispettivamente.

Sia $P = (x, y)$ un generico punto dell'ellisse. Posto $2a = \overline{PF} + \overline{PF'}$, utilizzando la formula della distanza tra due punti si ottiene:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a \tag{16}$$

Se nella (16) si isola il primo radicale, quindi si elevano a quadrato ambo i membri e si eseguono alcune riduzioni, si ottiene:

$$a\sqrt{x^2+c^2+2cx+y^2} = a^2 + cx$$

Elevando ancora una volta a quadrato e semplificando, si ha:

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

Si osservi che nel triangolo FPF' il lato FF' è minore della somma degli altri due, ossia $2c < 2a$, cioè $c < a$. Pertanto la differenza $a^2 - c^2$ risulta

positiva. In questo modo si può porre $a^2 - c^2 = b^2$, così che la precedente equazione risulta scritta nella forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{17}$$

La (17) è detta *equazione canonica* o *normale* dell'ellisse.

La retta che contiene i fuochi si dice *asse focal*e, mentre l'origine è il *centro* dell'ellisse.

I punti A e A' di intersezione dell'ellisse con l'asse focale e i punti B e B' di intersezione dell'ellisse con la retta perpendicolare all' asse focale e passante per il centro sono i *vertici* dell'ellisse.

Il segmento AA' è l'*asse maggiore* dell'ellisse, mentre BB' l'*asse minore*. I numeri a e b che compaiono nell'equazione canonica rappresentano le misure del *semiasse maggiore* e del *semiasse minore* rispettivamente e sono detti *semiassi* dell'ellisse.

Si osservi che un'equazione del tipo $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ in cui $a^2 < b^2$ rappresenta ancora una ellisse aventi per assi di simmetria gli assi cartesiani, ma i fuochi sono situati sull'asse delle y e hanno coordinate $(0, c) = (0, \sqrt{b^2 - a^2})$ e $(0, -c) = (0, -\sqrt{b^2 - a^2})$ rispettivamente.

Esercizi sull'ellisse

1. Scrivere l'equazione dell'ellisse che ha asse focale coincidente con l'asse delle x, semiasse maggiore uguale a 5 e passante per il punto $P = (3, 1)$.

   Soluzione. Affinché l'ellisse passi per il punto P deve risultare

   $$\frac{3^2}{a^2} + \frac{1^2}{b^2} = 1$$

   Poiché $a = 5$ si ottiene

   $$\frac{9}{25} + \frac{1}{b^2} = 1$$

   da cui $b^2 = \frac{25}{16}$. Pertanto l'equazione dell'ellisse risulta $\frac{x^2}{25} + \frac{16y^2}{25} = 1$.

2. Scrivere l'equazione dell'ellisse passante per il punto $P = (\frac{3\sqrt{3}}{2}, 1)$ e avente un fuoco nel punto $F' = (-\sqrt{5}, 0)$.

   Soluzione. Affinché l'ellisse passi per il punto P deve risultare

   $$\frac{(\frac{3\sqrt{3}}{2})^2}{a^2} + \frac{1^2}{b^2} = 1.$$

   Affinché un fuoco coincida con il punto $F' = (-\sqrt{5}, 0)$ deve risultare $a^2 - b^2 = (-\sqrt{5})^2$. Si deve pertanto risolvere il sistema

   $$\begin{cases} \frac{27}{4a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \\ \\ a^2 - b^2 = 5 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ha $a^2 = 5+b^2$. Sostituendo tale espressione nella prima equazione ed eseguendo alcune riduzioni, si ottiene $4b^4 - 11b^2 - 20$. Risolvendo tale equazione si trova $b^2 = -\frac{5}{4}$ o $b^2 = 4$. Poiché b^2 è non negativo (in questo caso $b^2 > 0$), l'unica soluzione ammissibile è $b^2 = 4$. Segue che $a^2 = 9$, pertanto l'equazione cercata è data da $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

3. Scrivere l'equazione della tangente all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{2} = 1$ nel suo punto $P = (-3, 1)$.

Soluzione. La tangente all'ellisse nel punto P è una retta del tipo $y - 1 = m(x + 3)$. Pertanto si considera il sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ \\ y = m(x + 3) + 1 \end{cases}$$

Sostituendo l'espressione di y data dalla seconda equazione, nella prima, si ottiene $x^2 + 9m^2(x + 3)^2 + 18m(x + 3) + 9 - 18 = 0$, ossia $x^2(9m^2 + 1) + 18m(3m + 1)x + 9(9m^2 + 6m - 1) = 0$. Si determina il Δ di quest'ultima equazione, quindi si pone $\Delta = 0$:

$$\Delta = 18^2m^2(3m + 1)^2 - 36(9m^2 + 1)(9m^2 + 6m - 1)$$

$$9m^2(3m + 1)^2 - (9m^2 + 1)(9m^2 + 6m - 1) = 0$$

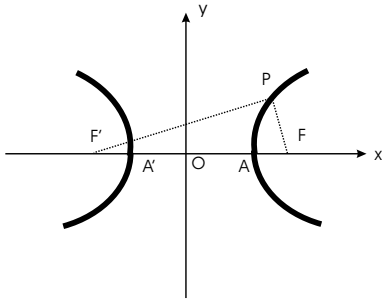
$$9m^2(9m^2 + 6m + 1 - 9m^2 - 6m + 1) - 9m^2 - 6m + 1 = 0$$

$$(3m - 1)^2 = 0$$

da cui $m = \frac{1}{3}$, quindi la tangente ha equazione $y = \frac{1}{3}x + 2$.

L'Iperbole

Si dice *iperbole* il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi detti fuochi.



Per determinare l'equazione cartesiana dell'iperbole si procede come nel caso dell'ellisse: si sceglie un sistema di riferimento cartesiano ortogonale in cui l'asse delle x coincide con la retta passante per i due fuochi F e F', mentre l'asse delle y coincide con la perpendicolare alla retta $r(F, F')$ passante per il punto medio del segmento FF'.

Sia $P = (x, y)$ un generico punto dell'iperbole e sia $2a$ la differenza costante dell distanze di P da F e F'. Sia $2c = \overline{FF'}$. Rispetto al sistema di riferimento scelto si ha che $F = (c, 0)$ e $F' = (-c, 0)$ e per definizione di iperbole risulta:

$$\begin{cases} \overline{PF} - \overline{PF'} = 2a \\ \quad \text{oppure} \\ \overline{PF'} - \overline{PF} = 2a \end{cases}$$

a seconda che $\overline{PF} > \overline{PF'}$ o $\overline{PF'} > \overline{PF}$. Questa differenza di segno scompare se si eleva a quadrato, pertanto il sistema sopra si riduce all'equazione

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Poiché nel triangolo FPF' un lato è maggiore della differenza degli altri due, ossia $2c > 2a$, cioè $c > a$, si ha che $c^2 - a^2 > 0$. Pertanto si può porre $c^2 - a^2 = b^2$, da cui l'equazione dell'iperbole risulta:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{18}$$

Tale equazione è detta *equazione canonica* o *normale* dell'iperbole.

La retta che contiene i fuochi è detta *asse focale* o *asse trasverso* dell'iperbole, mentre l'origine è il *centro* dell'iperbole.

Per $y = 0$ si ha che l'iperbole incontra l'asse focale nei punti $A = (a, 0)$ e $A' = (-a, 0)$ che sono detti *vertici* dell'iperbole.

L'iperbole non incontra la retta perpendicolare all'asse focale e per il centro. Tale retta è detta *asse non trasverso.*

Le rette di equazione $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$ sono dette *asintoti* dell'iperbole.

Si può dimostrare che se $P = (x, y)$ è un punto dell'iperbole e $P' = (x, bx/a)$ è un punto che giace su un asintoto e ha la stessa ascissa di P, la distanza $\overline{PP'}$ diventa sempre più piccola quando x aumenta in valore assoluto.

Se $a = b$ l'equazione canonica dell'iperbole risulta:

$$x^2 - y^2 = a^2 \tag{19}$$

Gli asintoti hanno equazione $y = x$ e $y = -x$ ovvero sono le bisettrici dei quadranti. In questo caso si parla di *iperbole equilatera.*

Se si scelgono i fuochi nei punti $F = (a, a)$ e $F' = (-a, -a)$ sulla bisettrice $y = x$, l'equazione dell'iperbole risulta del tipo:

$$xy = \frac{a^2}{2}$$

e gli asintoti sono gli assi coordinati.

Esercizi sull'iperbole

1. Scrivere l'equazione dell'iperbole di semidistanza focale 5 e di semiasse trasverso 3.

   Soluzione. Poiché la semidistanza focale vale 5 si ha $c^2 = 25$. Poiché il semiasse trasverso vale 3 si ha $a^2 = 9$. Da $b^2 = c^2 - a^2$ si ottiene $b^2 = 25 - 9 = 16$, pertanto l'iperbole cercata ha equazione $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

2. Scrivere l'equazione di una iperbole equilatera che passa per il punto $P = (5, 0)$.

   Soluzione. Affinché P appartenga all'iperbole deve risultare

   $$\frac{5^2}{a^2} = 1$$

   da cui $a^2 = 25$. Sapendo che un'iperbole equilatera ha equazione del tipo $x^2 - y^2 = a^2$, l'equazione cercata è data da $x^2 - y^2 = 25$.

3. Scrivere l'equazione di una iperbole che ha per asintoti le rette $y = \pm\frac{3}{5}x$ e per fuochi i punti $(\pm 2, 0)$.

   Soluzione. Si ha che $c^2 = 4$ e $\frac{b^2}{a^2} = \frac{9}{25}$. Sapendo che $b^2 = c^2 - a^2$ si ha $\frac{9}{25}a^2 = 4 - a^2$, ossia $\frac{34}{25}a^2 = 4$, da cui $a^2 = \frac{50}{17}$ e $b^2 = \frac{18}{17}$. Pertanto l'iperbole ha equazione $\frac{17x^2}{50} - \frac{17y^2}{18} = 1$.

10 Numeri Primi. Teorema della Fattorizzazione Unica. Algoritmo Euclideo per il Calcolo del Massimo Comune Divisore di Due Interi.

Numeri primi

La definizione di numero primo è piuttosto semplice: un intero n si dice *primo* se è divisibile soltanto per ± 1 e $\pm n$.

Il primo a dare la definizione di numero primo fu Euclide, nel VII libro degli elementi. Egli inoltre dimostrò che:

Teorema 1 *I numeri primi sono infiniti.*

Dimostrazione. Si procede per assurdo, ovvero sia A l'insieme dei numeri primi, si suppone che A sia finito, pertanto si ha $A = \{2, 3, 5, 7, \ldots, p\}$, dove p è l'ultimo numero primo ovvero p è il più grande numero primo. Sia m il

prodotto di tutti i numeri primi dell'insieme A, ossia $m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p$ e sia $n = m + 1$.

Si ha che n è maggiore di p quindi n non può essere primo. Tuttavia ogni intero o è primo o è fattorizzabile nel prodotto di numeri primi, quindi n è divisibile per 2 o per 3... o per p. Questo è assurdo, perché n diviso 2 o 3 ... o p dà sempre resto 1 poiché $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p + 1$.

Non esiste un modo per descrivere tutti i numeri primi e non si sa nemmeno se essi siano distribuiti sulla retta reale seguendo qualche regolarità.

Come accennato nella dimostrazione precedente, un numero intero è primo o fattorizzabile nel prodotto di numeri primi, ovvero vale il seguente teorema che enunciamo senza dimostrazione.

Teorema 2 (Teorema della fattorizzazione unica) *Ogni intero positivo n, $n > 1$, si può fattorizzare in modo unico come prodotto di potenze di numeri primi, ossia:*

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots p_m^{a_m}$$

dove $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ sono numeri primi e ciascun $a_i > 0$.

Esercizio. Dimostrare che se un numero primo p divide un prodotto di numeri interi, ossia divide $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_m$ dove $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \subset \mathbb{Z}$, allora p divide almeno uno dei fattori $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Soluzione. Per ipotesi si ha che p divide $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_m$, ossia $p | a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_m$. Si suppone per assurdo che p non divida nessuno dei fattori $a_1, a_2, \ldots, a_m$, ossia $p \nmid a_i$, per ogni $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Poiché $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_m = a_1 \cdot (a_2 \cdot \ldots \cdot a_m)$ e $p | a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_m$, ma $p \nmid a_1$, si ha che $p | a_2 \cdot \ldots \cdot a_m$. Da $a_2 \cdot \ldots \cdot a_m = a_2 \cdot (a_3 \cdot \ldots \cdot a_m)$ e da $p | a_2 \cdot \ldots \cdot a_m$, ma $p \nmid a_2$, si ha che $p | a_3 \cdot \ldots \cdot a_m$. Procedendo come sopra si ottiene che $p | a_m$, ma questo è assurdo poiché si è supposto che $p \nmid a_i$ per ogni $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Ciò significa che la supposizione $p \nmid a_i$ per ogni $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ è falsa, quindi p divide almeno uno dei fattori $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Nel capitolo 1 si è visto come determinare il massimo comune divisore tra due interi dopo averli scomposti nel prodotto di potenze di numeri primi. Di seguito il massimo comune divisore fra due interi viene determinato con un procedimento, diverso da quello del capitolo 1, noto come **algoritmo euclideo delle divisioni successive**.

Tale procedimento viene illustrato con un esempio.

Esempio. Calcolare $MCD(630, 132)$ mediante l'algoritmo euclideo.

Si divide il maggiore dei numeri per il minore:

$$630 = 4 \cdot 132 + 102$$

dove 4 è il primo quoziente, mentre 102 è il primo resto.

Il passo successivo consiste nell'eseguire la divisione tra il divisore e il primo resto:

$$132 = 1 \cdot 102 + 30$$

Il secondo resto è 30 il secondo quoziente 1.

Nel passo successivo si procede con la divisione tra divisore e resto del passo precedente:

$$102 = 3 \cdot 30 + 12$$

da cui:

$$30 = 2 \cdot 12 + 6$$

$$12 = 2 \cdot 6 + 0$$

Il procedimento termina quando si ottiene resto zero. Il massimo comune divisore quindi è dato dall'ultimo divisore, ossia quello corrispondente al resto nullo. In questo caso $MCD(630, 132) = 6$.

Esercizio. Calcolare $MCD(72, 22)$.
Soluzione.

$$72 = 3 \cdot 22 + 6$$

$$22 = 3 \cdot 6 + 4$$

$$6 = 1 \cdot 4 + 2$$

$$4 = 2 \cdot 2 + 0$$

Il $MCD(72, 22) = 2$.

11 Principio di Induzione.

Il *principio di induzione* è l'ultimo degli assiomi con cui Peano descrive l'insieme dei numeri naturali. In matematica tale principio viene frequentemente utilizzato: lo si trova in ogni ragionamento per ricorrenza.

Il principio di induzione può essere formulato come segue:

sia r un numero naturale assegnato e per ogni numero naturale $n \geq r$ sia assegnata una proposizione P_n. Supponendo che:

1. P_r è vera.
2. Per ogni $m \geq r$, se P_m è vera anche $P_{m'}$ è vera, essendo m' il successivo di m.

Allora P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq r$.

Di seguito si dà un esempio di dimostrazione basato sul principio di induzione.

Esempio. Dimostrare che la somma dei primi n numeri interi positivi è $\frac{n(n+1)}{2}$.

La proposizione P_n è data da $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

La proposizione P_2, cioè $1+2=3=\frac{2(2+1)}{2}$, è vera, ovvero quando $n=2$ la formula $\frac{n(n+1)}{2}$ dà effettivamente la somma dei primi 2 interi positivi.

Si può quindi supporre che la formula $\frac{n(n+1)}{2}$ dia effettivamente la somma dei primi n interi positivi quando $n=m-1$, ovvero si può supporre che P_{m-1} sia vera cioè $1+2+\ldots+(m-1)=\frac{(m-1)(m-1+1)}{2}=\frac{m(m-1)}{2}$.

Si dimostra che anche P_m è vera, ossia che $1+2+\ldots+m=\frac{m(m+1)}{2}$.

Si considera ora la somma dei primi m interi positivi: $1+2+\ldots+m$. Poiché $1+2+\ldots+m=1+2+\ldots+(m-1)+m$ e per ipotesi induttiva si ha che $1+2+\ldots+(m-1)=\frac{m(m-1)}{2}$, segue che $1+2+\ldots+m=\frac{m(m-1)}{2}+m=\frac{m(m-1)+2m}{2}=\frac{m(m+1)}{2}$, che è quanto si voleva dimostrare.

Esercizio. Dimostrare che per ogni $n\in\mathbb{N}$ si ha che 8^n-3^n è divisibile per 5.

Soluzione. P_n è la proposizione definita da $P_n: 8^n-3^n=5h$ con $h\in\mathbb{Z}$. La proposizione P_1, ossia $8^1-3^1=5$ è vera, pertanto si può supporre P_{m-1} vera cioè si può supporre $8^{m-1}-3^{m-1}=5k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Si dimostra che P_m è vera, ossia si dimostra che $8^m-3^m=5t$, $t\in\mathbb{Z}$.

Si considera $8^{m-1}-3^{m-1}=5k$ e si moltiplicano ambo i membri dell'uguaglianza per 8. Ponendo $8k=k_1$ si ottiene $8(8^{m-1}-3^{m-1})=5k_1$. A primo membro dell'ultima uguaglianza ottenuta si aggiunge e si toglie 3^m, ottenendo così $8^m-3^m+3^m-8\cdot 3^{m-1}=5k_1$. Spostando $3^m-8\cdot 3^{m-1}=-3^{m-1}(8-3)$ a secondo membro si ottiene $8^m-3^m=5k_1+5\cdot 3^{m-1}$, ovvero $8^m-3^m=5(k_1+3^{m-1})$. Poiché $k_1+3^{m-1}\in\mathbb{Z}$, posto $t=k_1+3^{m-1}$, si ha $8^m-3^m=5t$, $t\in\mathbb{Z}$, che è quanto si voleva dimostrare.

Esercizio. Sia A un insieme avente n elementi e sia $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti di A. Dimostrare che $\mathcal{P}(A)$ ha 2^n elementi.

Soluzione. Si ha che $P_n: |A|=n$ allora $|\mathcal{P}(A)|=2^n$.

La proposizione P_0 è vera. Infatti se $|A|=0$ significa che A è l'insieme vuoto, per cui $\mathcal{P}(A)=\{\emptyset\}$ cioè $|\mathcal{P}(A)|=2^0=1$.

Si suppone P_{m-1} vera, ovvero si suppone che se $|A|=m-1$, allora $|\mathcal{P}(A)|=2^{m-1}$.

Si dimostra che P_m è vera, ossia si deve far vedere che se $|A|=m$ allora $|\mathcal{P}(A)|=2^m$.

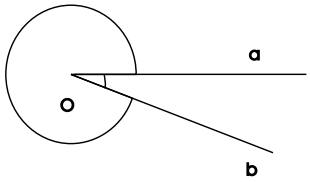
Si suppone $|A|=m$. Si sceglie un elemento $a\in A$ e si indica con A' l'insieme $A\backslash\{a\}$. Si osservi che $|A'|=m-1$, pertanto vale l'ipotesi induttiva, ovvero $|\mathcal{P}(A')|=2^{m-1}$.

Sia $\mathcal{A}$ l'insieme dei sottoinsiemi di A contenenti l'elemento a e sia invece $\mathcal{B}$ l'insieme dei sottoinsiemi di A non contenenti l'elemento a. L'insieme $\mathcal{P}(A)$ si può rappresentare come unione disgiunta di $\mathcal{A}$ e di $\mathcal{B}$.

Si osservi che ogni elemento di $\mathcal{A}$ si ottiene da un elemento di $\mathcal{B}$ aggiungendo l'elemento a, pertanto $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}| = 2^{m-1}$ poiché $\mathcal{B} = \mathcal{P}(A')$. Si ha così che $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| = 2 \cdot 2^{m-1} = 2^m$ che è quanto si voleva dimostrare.

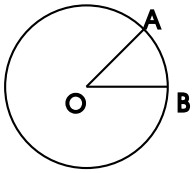
12 Trigonometria: Gradi e Radianti; Funzioni seno, coseno e tangente; Grafici delle Funzioni Trigonometriche e Proprietà; Funzioni Inverse; Angoli Associati.

Si dice *angolo* ciascuna delle due parti del piano in cui esso è diviso da due semirette a e b uscenti da uno stesso punto O (semirette incluse).



Il punto O si dice *vertice* dell'angolo, le due semirette si dicono *lati* dell'angolo.

Si dice *arco* (di circonferenza) la parte di circonferenza inclusa in un angolo con vertice nel centro della circonferenza stessa, detto anche angolo al centro.



I punti A e B di intersezione dei lati dell'angolo al centro con la circonferenza si dicono *estremi* dell'arco.

Un arco di estremi A e B lo si indica con $\overset{\frown}{AB}$. L'arco e l'angolo al centro che lo determina si dicono *corrispondenti*.

Per misurare un angolo si deve dapprima fissare una unità di misura. Come unità di misura si possono scegliere due sottomultipli dell'angolo giro: il *grado* e il *radiante*.

Il *grado* si può definire come la 360^a parte dell'angolo giro.

Invece si dice *angolo radiante* l'angolo al centro di una circonferenza di raggio arbitrario, che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio.

Poiché una circonferenza di raggio r misura $2\pi r$, l'angolo giro misura 2π radianti .

Più in generale, indicata con x la misura di un angolo in radianti e con y la misura dello stesso angolo in gradi, si ha che $360 : 2\pi = y : x$, da cui $x = \frac{2y\pi}{360}$, ossia $x = \frac{y\pi}{180}$, e $y = \frac{180x}{\pi}$.

Un angolo si dice *orientato* quando è stabilito quale dei due dei suoi lati deve considerarsi per primo. Si indica con $\overset{\frown}{ab}$ l'angolo orientato il cui primo lato è a e il secondo b.

Fissato un punto O nel piano e una semiretta r uscente da O, si ha che r può ruotare attorno ad O nel verso antiorario o nel verso orario.

Il verso antiorario si dice *positivo*, mentre quello orario *negativo*.

Un angolo orientato $\overset{\frown}{ab}$, di vertice O, si dice *positivo* se l'angolo è descritto da una rotazione positiva di a attorno ad O. Se invece l'angolo è descritto da una rotazione negativa di a attorno ad O, allora $\overset{\frown}{ab}$ si dice *negativo*.

La *misura di un angolo orientato* $\overset{\frown}{ab}$ è data dalla misura assoluta presa con il segno + se l'angolo è positivo, con il segno − se l'angolo è negativo.

Data una circonferenza $\mathcal{C}$ e un punto P su di essa, si ha che P può muoversi su $\mathcal{C}$ in due sensi o versi uno opposto all'altro.

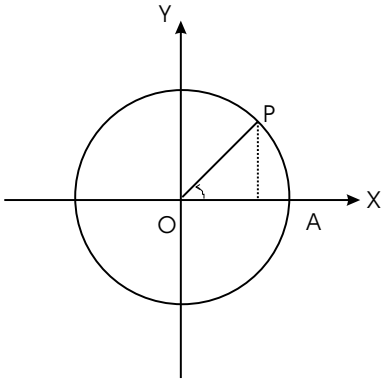
Una circonferenza si dice *orientata* quando su di essa è fissato un verso. Tale verso si dice *positivo*, mentre l'altro *negativo*.

Si assume come verso positivo quello antiorario.

Data una circonferenza orientata $\mathcal{C}$ di centro O, un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, di origine O, si dice *associato* a $\mathcal{C}$ se l'angolo orientato formato dai due semiassi positivi x e y risulta positivo.

Si dice *circonferenza goniometrica* una circonferenza orientata alla quale sia associato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale in cui l'unità di misura dei segmenti coincide con il raggio della circonferenza.

Data una circonferenza goniometrica e un angolo (o arco) orientato α, con il primo lato conincidente con il semiasse positivo x, si indica con A il punto di intersezione del primo lato dell'angolo con la circonferenza, mentre si indica con P il punto di intersezione del secondo lato dell'angolo con la circonferenza.



Si dice *seno* dell'angolo (o arco) orientato α, e lo si indica con $\sin\alpha$, l'ordinata del punto P.

Si dice *coseno* dell'angolo (o arco) orientato α, e lo si indica con $\cos\alpha$, l'ascissa del punto P.

In questo modo risultano definite due funzioni che hanno come dominio l'insieme dei numeri reali.

Per ogni angolo orientato α vale la seguente relazione (fondamentale):

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Da tale relazione si ottiene che:

$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1 \text{ e } -1 \leq \cos\alpha \leq 1$$

cioè il seno e il coseno di un angolo orientato sono sempre numeri compresi fra -1 e 1, estremi inclusi. Pertanto le uguaglianze del tipo $\cos\alpha = 7, \sin\alpha = 3, \cos\alpha = -5$ sono assurde.

Si dice *tangente* di un angolo (o arco) orientato α, e si scrive $\tan\alpha$, il rapporto tra il seno e il coseno dello stesso angolo (o arco), ossia $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Segue immediatamente che non esiste la tangente di angoli orientati la cui misura in gradi sia $\pm 90°$ o $\pm 270°$. In altre parole il dominio della funzione tangente è dato da $\mathbb{R} \setminus \{t : t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

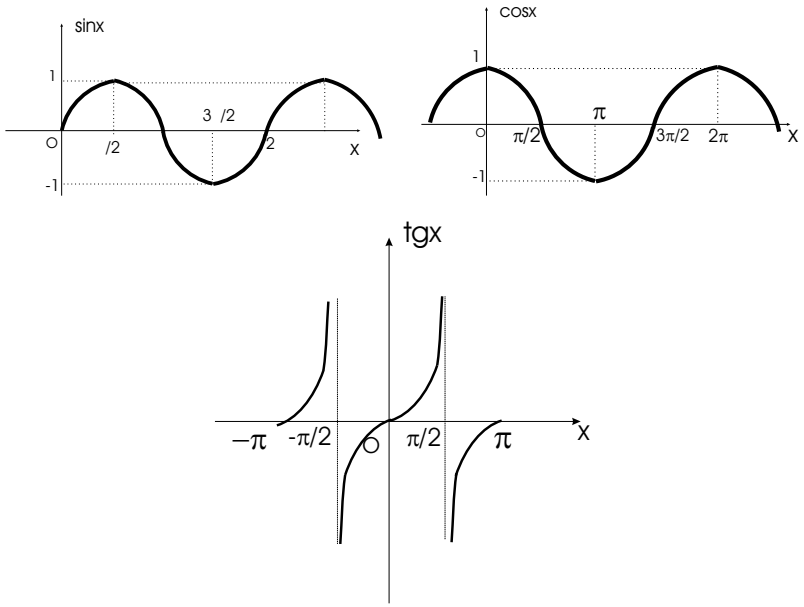
Si osservi che la tangente di un angolo orientato, al variare dell'angolo, può assumere qualunque valore, positivo, negativo o nullo, ovvero varia da $-\infty$ a $+\infty$.

La tangente di un angolo (o arco) orientato può essere definita anche in un altro modo. Più precisamente, data una circonferenza goniometrica di centro O, si consideri su di essa un angolo orientato $\overset{\frown}{AOP}$, dove A è il punto di intersezione della circonferenza con l'asse x. Si dice tangente goniometrica dell'angolo orientato $\overset{\frown}{AOP}$ l'ordinata del punto T di intersezione, quando esiste, fra la retta OP e la tangente geometrica alla circonferenza nel punto A.

Il seno e il coseno sono funzioni periodiche dell'angolo, con periodo 2π radianti, ossia ogni qualvolta la misura di un angolo varia di 2π, il seno e il coseno ritornano ad assumere lo stesso valore.

Anche la tangente è una funzione periodica dell'angolo, con periodo π radianti.

Così, volendo studiare i grafici delle funzioni goniometriche, è sufficiente considerare soltanto i valori che esse assumono quando la misura in radianti dell'angolo varia nell'intervallo $[0, 2\pi]$ per il seno e coseno o nell'intervallo $[0, \pi]$ per la tangente. Indicando con x la misura in radianti di un angolo orientato, i grafici che si ottengono sono i seguenti:



Dai grafici sopra si possono ricavare altre proprietà delle funzioni seno , coseno e tangente:

- la funzione seno è dispari, ossia $\sin t = -\sin(-t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$; la funzione coseno è pari, ossia $\cos t = \cos(-t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$; la funzione tangente è dispari nel suo dominio;

- la funzione seno è positiva in $(0, \pi)$ e negativa in $(\pi, 2\pi)$; la funzione coseno è positiva in $(0, \frac{\pi}{2})$ e in $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ mentre è negativa in $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$; la funzione tangente è positiva in $(0, \frac{\pi}{2})$ e negativa in $(-\frac{\pi}{2}, 0)$;

- la funzione seno è crescente in $[0, \frac{\pi}{2}]$ e in $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ mentre è decrescente in $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$; la funzione coseno è crescente in $[\pi, 2\pi]$ e decrescente in $[0, \pi]$; la funzione tangente è crescente in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;

- la funzione seno è concava in $[0, \pi]$ e convessa in $[\pi, 2\pi]$; la funzione coseno è concava in $[0, \frac{\pi}{2}]$ in $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ mentre è convessa in $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$; la funzione tangente è concava in $(-\frac{\pi}{2}, 0]$ e convessa in $[0, \frac{\pi}{2})$.

Si considerano ora le *inverse* delle funzioni trigonometriche.

Come è già stato detto, le funzioni seno e coseno hanno dominio uguale a $\mathbb{R}$ e codominio dato da $[-1, 1]$. Tali funzioni risultano suriettive in $[-1, 1]$ (infatti ogni retta del tipo $y = k$ con $-1 \leq k \leq 1$ interseca i grafici delle funzioni seno e coseno in almeno un punto), ma non sono iniettive nel loro dominio, quindi non si possono invertire. Tuttavia è possibile restringere il dominio delle suddette funzioni, scegliendo un intervallo in modo tale che le funzioni inverse siano definite su tutto l'intervallo $[-1, 1]$.

Per il seno si sceglie l'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. La funzione inversa è detta *arcoseno*. E' definita in $[-1, 1]$ e ha immagine $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Viene indicata con $x \mapsto \arcsin x$.

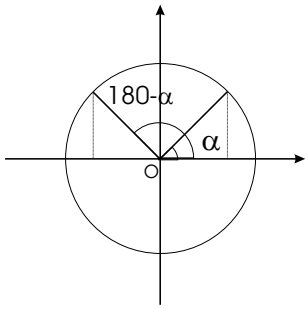
Per il coseno si considera l'intervallo $[0, \pi]$. La funzione inversa è detta *arcocoseno*. E' definita in $[-1, 1]$ e ha immagine $[0, \pi]$. Viene indicata con $x \mapsto \arccos x$.

La funzione tangente nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è iniettiva e la sua immagine è data da tutto l'asse reale. La sua funzione inversa è detta *arcotangente*. E' definita in $\mathbb{R}$ e ha immagine $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Viene indicata con $x \mapsto \arctan x$.

Si considerano infine alcune delle relazioni tra il seno e il coseno di angoli associati. Dato un angolo orientato α, si dicono angoli *associati* all'angolo α quegli angoli le cui funzioni goniometriche in valore assoluto sono uguali a quelle dell'angolo α. Gli angoli associati di α sono: l'angolo supplementare di α, l'angolo che differisce da α di un angolo piatto, l'angolo complementare di α, l'angolo che differisce da α di un angolo retto, l'angolo opposto di α, l'angolo esplementare di α. Analogamente per gli archi orientati.

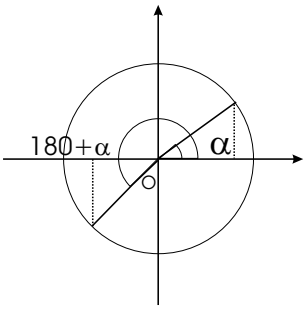
Si ha che:

1. due angoli orientati supplementari hanno lo stesso seno, mentre i coseni hanno valori opposti;

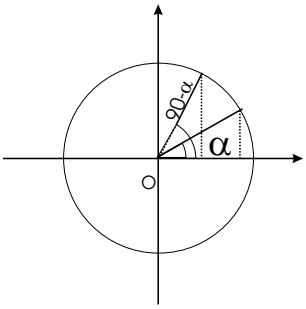


2. due angoli orientati che differiscono di π hanno i seni e i coseni con

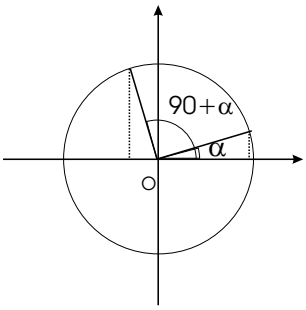
valori opposti;



3. il seno di un angolo orientato è uguale al coseno dell'angolo complementare. Il coseno di un angolo orientato è uguale al seno dell'angolo complementare;

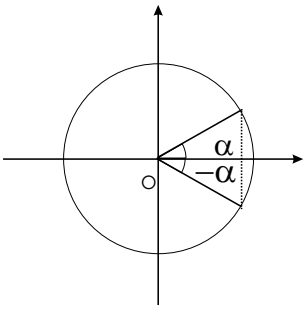


4. il seno di un angolo orientato α è uguale all'opposto del coseno dell'angolo $\alpha + \frac{\pi}{2}$, mentre il coseno di α coincide con il seno di $\alpha + \frac{\pi}{2}$;

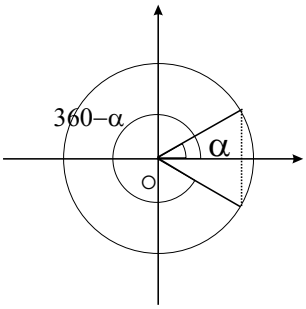


5. due angoli orientati opposti hanno lo stesso coseno, mentre i seni hanno

valori opposti;



6. due angoli orientati esplementari hanno lo stesso coseno, mentre i seni hanno valori opposti.



13 Funzione Esponenziale e Funzione Logaritmica

Sia a un numero reale positivo. Per ogni numero reale x la potenza a^x risulta ben definita.

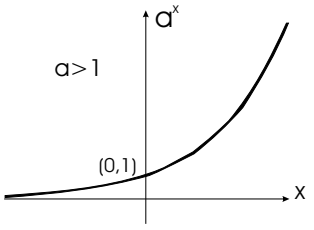
In altre parole, dato $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$, è possibile definire la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ ponendo per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$.

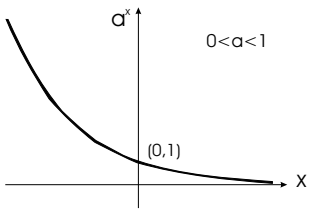
Si osservi che se $a = 1$ la funzione f risulta costante, poiché $f(x) = 1^x = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Invece se $a > 0$ e $a \neq 1$ la funzione f sopra definita prende il nome di funzione esponenziale di base a.

La funzione esponenziale $f(x) = a^x$, o equivalentemente $y = a^x$, è una corrispondenza biunivoca di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^+$ ed è pertanto invertibile.

La funzione esponenziale risulta monotona crescente se la base a maggiore di 1, altrimenti se $0 < a < 1$ la funzione esponenziale risulta decrescente.





Si osservi che il grafico di una funzione esponenziale $y = a^x$ passa sempre per i punti $(0, 1)$, $(1, a)$ e $(-1, \frac{1}{a})$. Inoltre se $a > 1$ la funzione cresce molto rapidamente quando x cresce, mentre si avvicina rapidamente a zero quando x è negativo e grande in valore assoluto. Se invece $0 < a < 1$ la funzione cresce molto rapidamente quando x è negativo e grande in valore assoluto, mentre si avvicina rapidamente a zero al crescere di x.

Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$. Comunque preso $x \in \mathbb{R}$, con $x > 0$, si dice logaritmo in base a di x, e lo si indica con $\log_a x$, il numero reale y tale che $a^y = x$.

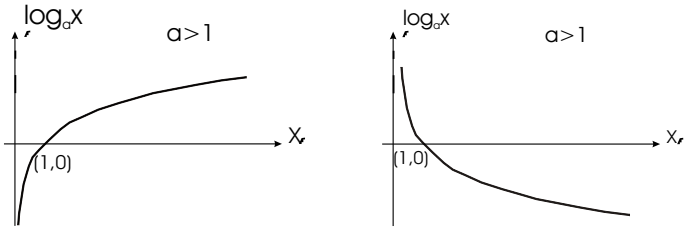
La funzione $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \log_a(x)$ si chiama funzione logaritmica di base a.

La funzione logaritmica è una corrispondenza biunivoca di $\mathbb{R}^+$ in $\mathbb{R}$ ed è pertanto invertibile. La funzione inversa è la funzione esponenziale di base a. Infatti posto $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$,si ha che

$$x \overset{f}{\mapsto} a^x \overset{g}{\mapsto} \log_a a^x = x$$

$$x \overset{g}{\mapsto} \log_a x \overset{f}{\mapsto} a^{\log_a x} = x.$$

Si ha inoltre che la funzione logaritmica $y = \log_a x$ risulta monotona crescente se $a > 1$, monotona decrescente se $0 < a < 1$.



Si osservi che il grafico di una funzione logaritmica $y = \log_a x$ passa sempre per i punti $(1, 0)$, $(a, 1)$ e $(\frac{1}{a}, -1)$.

Siano a, x e y numeri reali positivi, con $a \neq 1$ e sia z un numero reale. Valgono le seguenti proprietà:

1. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$;
2. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;
3. $\log_a x^z = z \log_a x$.

Sia $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $b \neq 1$. Vale la seguente formula:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Tale formula è nota come formula di cambiamento di base dei logaritmi.